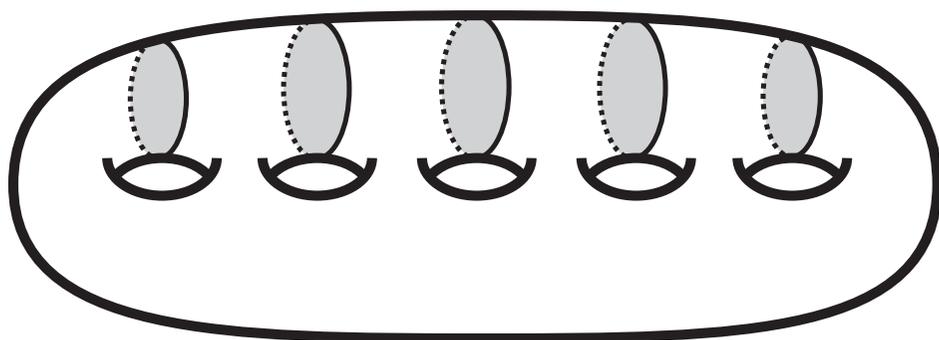


# 3次元多様体入門

森元勘治著



本書は、改訂電子版です。  
ご自由にダウンロードし、教育研究にご活用下さい。

# まえがき

多様体という言葉は、各点の近傍がユークリッド空間になっているような図形を意味します。そして、その局所的なユークリッド空間がつながって、全体として様々な性質を持つ興味深い対象となります。多様体の概念はリーマンに始まると言われており、その本格的な研究は約百年ほど前から始まりました。そして近年特に盛んに研究されるようになったのが、各点の近傍が3次元ユークリッド空間であるような図形、すなわち3次元多様体です。3次元空間というのは、我々が住んでいるこの空間のことですから、3次元多様体の研究は、我々が住んでいる空間そのものの研究ということができます。もちろん我々は、局所的にしか空間を感じることはできませんので、ユークリッド空間で十分なのですが、宇宙全体を見渡すと、もしかしたら想像もつかないような3次元多様体になっているかも知れません。

さて、二つの図形の上に連続な全単射で、逆写像も連続なものがあるとき、それらは同相、または位相同形といい、そのときの写像を同相写像といいます。そして、同相なものは同じ図形とみなして図形の研究を行うのが、位相幾何学です。さらに、その同相写像に微分可能性や組み合わせ構造を加えて研究する分野を、微分位相幾何学や、組合せ位相幾何学といいます。また、同相写像によって変わらないような性質や量を、位相不変量または単に不変量といいます。

3次元多様体の研究は、多様体の位相不変量をとおして研究する立場、多様体の幾何構造をとおして研究する立場、そして多様体の組合せ構造をとおして研究する立場に大きく分けることができます。位相不変量の研究は、最近量子群を用いた不変量が多く発見され、統計物理学などとの関係もあって大きな広がりを見せています。幾何構造の研究は、サー斯顿による双曲幾何学の研究を契機に大きな発展を遂げています。最後に述べた組合せ構造から研究する立場は、最も古くからある伝統的な方法であり、本書はこの立場から書かれています。しかしこれらの立場の違いは独立したものではなく、お互い密接に関連しており、特に本書は入門書ですので、3次元多様体の研究に関する共通の基礎知識が多く述べられています。

本書は、11章までと12章以降とに大きく分けることができます。

11章までの目標は、3次元多様体の連結と分解の存在と一意性、およびヒューガード分解と連結との関係を示し、それらの証明を通して、3次元多様体論の伝統的な手法に慣れていただくことです。

12章以降は、ループ定理、球面定理、圧縮不可能曲面等に見られるように、基本群やホモロジー群等の代数的対象と3次元多様体の位相形との関係を学び、ハーケン多様体と基本群

との関係, およびトーラス分解の存在と一意性を示すことが目標となります。

従って, 基本群やホモロジー群等の知識のあまり無い読者は, まず 11 章まで読まれることをお勧めします。実際 10 章と 11 章には, それらの群は全く登場しませんし, そこまででも, 3 次元多様体論の美しさや面白さを感じていただけたと思います。

3 次元多様体の研究は日々進展しており, それらの研究成果は, 我々の住む 3 次元空間というものが, いかにも不思議で魅惑的なものかということを教えてください。本書によって, 一人でも多くの読者が 3 次元多様体に親しまれることを, 心より念願しております。

最後になりましたが, 本書の執筆に際して, 多くの御援助と御指導をいただきました, 鈴木晋一先生に深く感謝いたします。また, 原稿に対して貴重な助言をいただきました, 小林毅氏に深く感謝いたします。さらに, 本書の出版にあたってお世話になりました, 培風館編集部 岩田誠司氏に深く感謝いたします。

1996 年 5 月

著者しるす

# 電子版 まえがき

本書が出版されてから、17年が経過しました。1996年に初版が発行され、1997年に第2刷が発行されましたが、その後、品切れ状態が続いていました。そのため、著者の元へは多方面から重版の希望が寄せられていました。そこでこのたび、電子版を無料配信することになりました。どうぞ、ご自由にご利用いただき、教育研究に、存分にご活用下さい。

ところで、初版の発行から今日までの間で、3次元多様体論における最も大きな進展は、ロシアの数学者ペレルマンによるポアンカレ予想の解決であることは、言うまでもないでしょう。このことについては、あとがきで述べることにいたします。

なお、前述しましたように、本電子版は、著者が個人的に配信する物ですので、何かございましたら、著者まで直接お問い合わせいただければ幸いです。

2013年4月

著者しるす

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>単体的複体と単体写像</b>	<b>1</b>
1.1 節	単体的複体と多面体	1
1.2 節	星状近傍	2
1.3 節	複体の細分	3
1.4 節	単体写像	5
1.5 節	オイラー標数	6
<b>第 2 章</b>	<b>組み合わせ多様体</b>	<b>7</b>
2.1 節	組み合わせ多様体の定義	7
2.2 節	正則近傍	8
2.3 節	球面と球体に関する基本定理	9
2.4 節	部分多様体の交わりと一般の位置	10
2.5 節	多様体の向き	13
<b>第 3 章</b>	<b>1 次元多様体と 2 次元多様体</b>	<b>15</b>
3.1 節	1 次元多様体	15
3.2 節	向き付け可能 2 次元多様体	15
3.3 節	向き付け不可能 2 次元多様体	17
<b>第 4 章</b>	<b>基本的な 3 次元多様体</b>	<b>20</b>
4.1 節	3 次元球体	20
4.2 節	トーラス体	20
4.3 節	ハンドル体	20
4.4 節	3 次元球面	23
4.5 節	積多様体	24
4.6 節	クラインの壺体	25
	コラム (鏡の中)	25
<b>第 5 章</b>	<b>ハンドル体の特徴付け</b>	<b>26</b>
5.1 節	平面曲面上の写像の拡張	26
5.2 節	完備メリディアン円板系	27
<b>第 6 章</b>	<b>ヒーガード分解</b>	<b>30</b>

6.1 節	ヒーガード分解の定義	30
6.2 節	ヒーガード分解の存在	31
<b>第 7 章</b>	<b>ヒーガード図式と基本群の表示</b>	<b>34</b>
7.1 節	ヒーガード図式	34
7.2 節	群の表示とザイフェルト・ファンカンペンの定理	35
7.3 節	基本群の表示	38
	コラム (宇宙の設計図)	41
<b>第 8 章</b>	<b>レンズ空間</b>	<b>42</b>
8.1 節	トーラス上の単純閉曲線	42
8.2 節	レンズ空間の定義	44
8.3 節	レンズ空間の分類	46
<b>第 9 章</b>	<b>積多様体のヒーガード分解</b>	<b>48</b>
9.1 節	ヒーガード分解の構成	48
9.2 節	ヒーガード種数の決定	49
	コラム (4 次元)	50
<b>第 10 章</b>	<b>連結和</b>	<b>51</b>
10.1 節	連結和の定義	51
10.2 節	既約多様体と素な多様体	53
10.3 節	連結和分解の存在と一意性	55
<b>第 11 章</b>	<b>ヒーガード分解と連結和</b>	<b>60</b>
11.1 節	曲面の階層	60
11.2 節	切り貼り技法	62
11.3 節	ヒーガード分解と本質的球面	64
11.4 節	ヒーガード種数の加法性	69
<b>第 12 章</b>	<b>デーアの補題, ループ定理, 球面定理</b>	<b>72</b>
12.1 節	デーアの補題とループ定理	72
12.2 節	球面定理とポアンカレ予想	73
12.3 節	トーラス体定理	74
12.4 節	2 重曲線に沿った切り貼り	76
12.5 節	ループ定理の証明	81
	コラム (交差の解消)	84
<b>第 13 章</b>	<b>圧縮不可能曲面</b>	<b>85</b>
13.1 節	圧縮不可能曲面の定義	85
13.2 節	射影空間 $P^3$	86

13.3 節	1次元ホモロジー群と両側圧縮不可能曲面	89
13.4 節	ハーケン多様体とワルトハウゼンの定理	93
<b>第 14 章</b>	<b>自由群と自由積</b>	<b>98</b>
14.1 節	自由群を基本群に持つ 3次元多様体	98
14.2 節	クネーザー予想	100
<b>第 15 章</b>	<b><math>S^1</math> 上の曲面束</b>	<b>105</b>
15.1 節	ファイバー束の定義	105
15.2 節	曲面束の基本群とヒーガード分解	108
<b>第 16 章</b>	<b>曲面上の <math>S^1</math> 束</b>	<b>111</b>
16.1 節	向き付け可能な曲面を底空間とする $S^1$ 束	111
16.2 節	向き付け不可能な曲面を底空間とする $S^1$ 束	114
16.3 節	曲面上の $I$ 束	116
	コラム (ガラスのクラインの壺)	118
<b>第 17 章</b>	<b>ザイフェルト多様体</b>	<b>119</b>
17.1 節	ザイフェルト多様体の定義と表現	119
17.2 節	ザイフェルト多様体の基本群の表示	125
17.3 節	ザイフェルト多様体のヒーガード分解	127
<b>第 18 章</b>	<b>トーラス分解</b>	<b>132</b>
18.1 節	特殊ザイフェルト多様体	132
18.2 節	アニュラス定理とトーラス定理	136
18.3 節	特性ザイフェルト対	138
18.4 節	トーラス分解定理の証明	141
付録	トーラスの写像類群	146
	参考文献・あとがき	149
	電子版 あとがき (ポアンカレ予想の解決)	153
	索引	155

# 記号と言葉の準備

本書をとおして以下のような記号と言葉を用いる。

- (1)  $\mathbf{R}$  : 実数全体の集合。
- (2)  $\mathbf{Q}$  : 有理数全体の集合。
- (3)  $\mathbf{Z}$  : 整数全体の集合, または無限巡回群。
- (4)  $\mathbf{N}$  : 自然数全体の集合 (0 は含まない)。
- (5)  $\emptyset$  : 空集合。
- (6) 点  $x$  が集合  $X$  に属するとき  $x \in X$  と書く。
- (7) 集合  $Y$  が集合  $X$  の部分集合であるとき  $Y \subset X$  と書く ( $X = Y$  の場合も含む)。
- (8) 写像対  $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  は,  $f : X \rightarrow Y, f(U) \subset V$  を表す。
- (9)  $R^n$  :  $n$  次元ユークリッド空間 (ただし  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ )。  
すなわち,  $R^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R} \ (i = 1, 2, \dots, n) \}$  であり,  
2 点  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  に対して  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の距離を  
 $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$  と定めた距離空間。
- (10)  $S^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \}$  :  $n$  次元単位球面。また,  $S^n$  に同相な位相空間を  $n$  次元球面という。
- (11)  $B^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \}$  :  $n$  次元単位球体。また,  $B^n$  に同相な位相空間を  $n$  次元球体という。
- (12)  $I = [0, 1]$  :  $R^1$  における単位区間。
- (13) “ $\cong$ ” : 二つの位相空間が同相, または二つの群が同形。
- (14) 単位元のみからなる群を自明な群といい,  $\{0\}$  または  $\{1\}$  と書く。
- (15) 位相空間  $Y$  が位相空間  $X$  の部分空間であるとき,  $Y$  の  $X$  における閉包を  $\text{cl}(Y; X)$  または  $\text{cl}(Y)$  と書く。
- (16) 位相空間  $X$  において,  $X$  の点  $x$  を同じ点  $x$  に対応させる写像を,  $X$  上の恒等写像といい,  $\text{id}$  または  $\text{id}_X$  と書く。

(17)  $X, A$  を二つの位相空間とし,  $f: A \rightarrow X, g: A \rightarrow X$  を二つの連続写像とする。

(i) 連続写像  $F: A \times I \rightarrow X$  で, 各  $t \in I$  に対して,  $F|_{A \times \{t\}} = f_t$  とおくと,  $f_0 = f, f_1 = g$  となるものがあるとき,  $f$  と  $g$  はホモトピックという。このとき,  $F$  または  $\{f_t\}$  を  $f$  と  $g$  の間のホモトピーといい,  $\{f_t\}: A \rightarrow X$  と書く。

(ii)  $f$  と  $g$  がともに中への同相写像であり, 連続写像  $F: A \times I \rightarrow X$  で, 各  $t \in I$  に対して,  $F|_{A \times \{t\}} = f_t$  とおくと,  $f_t: A \times \{t\} \rightarrow X$  は中への同相写像であり,  $f_0 = f, f_1 = g$  となるものがあるとき,  $f$  と  $g$  はイソトピックという。このとき,  $F$  または  $\{f_t\}$  を  $f$  と  $g$  の間のイソトピーといい,  $\{f_t\}: A \rightarrow X$  と書く。

(18)  $X, A$  を二つの位相空間とし,  $f: A \rightarrow X, g: A \rightarrow X$  を二つの中への同相写像とする。連続写像  $F: X \times I \rightarrow X$  で, 各  $t \in I$  に対して,  $F|_{X \times \{t\}} = f_t$  とおくと,  $f_t: X \times \{t\} \rightarrow X$  は  $X$  上の自己同相写像であり,  $f_0 = id$ . ( $X$  上の恒等写像),  $f_1 \circ f = g$  となるものがあるとき,  $f$  と  $g$  またはその像  $f(A)$  と  $g(A)$  はアンビエントイソトピックという。このとき,  $F$  または  $\{f_t\}$  を  $f$  と  $g$  または  $f(A)$  と  $g(A)$  の間のアンビエントイソトピーといい,  $\{f_t\}: X \rightarrow X$  と書く。

(19)  $X$  を位相空間とし,  $x$  を  $X$  内のある点とする。 $X$  の  $x$  を基点とする  $p$  次元ホモトピー群を  $\pi_p(X, x)$  と書く。特に  $p = 1$  のとき  $\pi_1(X, x)$  を  $X$  の基本群とよぶ。

(20)  $K$  を単体的複体とする。 $K$  の整数係数  $p$  次元ホモロジー群を  $H_p(K; \mathbf{Z})$  と書く。 $K$  の部分複体  $L$  に対して,  $K$  の  $L$  を法とする整数係数  $p$  次元相対ホモロジー群を  $H_p(K, L; \mathbf{Z})$  と書く。

# 第1章

## 単体的複体と単体写像

本章において、図形を組合せ的观点から研究する場合の基本要素となる単体と、単体の集まりである単体的複体について学ぶ。またそれらの間の写像について学ぶ。

本書は3次元多様体を組合せ的观点から研究する立場をとっているため、これらの概念は基本的で重要なものである。しかしここでは最小限の基本概念や用語を述べるにとどめるので、より詳しいことは[1]や[4]等を参照されたい。またいくつかの基本的な定理を証明なしに述べるが、それらについても[1]、[4]等を参照されたい。

本章においては、図形はすべてあるユークリッド空間内にあるものとする。

### 1.1 単体的複体と多面体

$n$ 次元ユークリッド空間  $R^n$  内にある  $k+1$ 個の点  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  を考える。 $k$ 個のベクトル  $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, \dots, \overrightarrow{a_0a_k}\}$  が1次独立であるとき、これらの点  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  は一般の位置にあるという。

今、 $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  が一般の位置にあるとする。このとき、 $R^n$  内の点集合

$$\left\{ x \in R^n \mid \begin{array}{l} x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1, \lambda_i \geq 0 \ (i = 0, 1, \dots, k) \end{array} \right\}$$

を、 $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  を頂点とする  $k$ 次元単体、または単体といい、 $\langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle$ 、 $\sigma^k$  または  $\sigma$  などと書く。 $\sigma_0$  は1点、 $\sigma^1$  は線分、 $\sigma^2$  は3角形の周と内部、 $\sigma^3$  は四面体の表面と内部である(図1.1)。したがって、 $\sigma^k$  は  $k$ 次元の3角形とその内部ということが出来る。

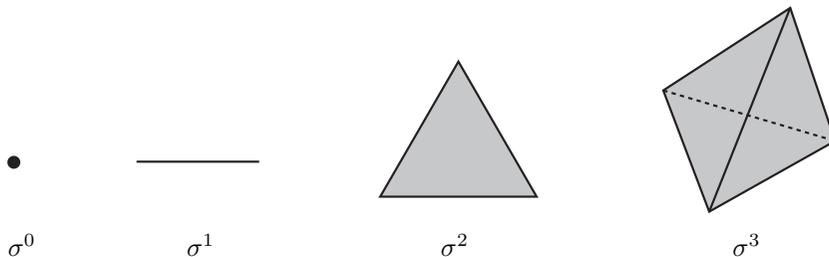


図 1.1

$\{b_0, b_1, \dots, b_\ell\}$  を  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  の部分集合とする。 $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  が一般の位置にあることより、 $\{b_0, b_1, \dots, b_\ell\}$  も一般の位置にある。よって、これらを頂点とする  $\ell$ 次元

単体を  $\tau^\ell$  または  $\tau$  と書き,  $\sigma^k$  の  $\ell$  次元面または面という。またこのとき,  $\tau^\ell \preceq \sigma^k$  と書く。特に  $\ell < k$  のときは  $\tau^\ell \prec \sigma^k$  と書く。 $k$  次元単体の  $\ell$  次元面は  ${}_{k+1}C_{\ell+1}$  個ある。また  $k$  次元単体  $\sigma = \langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle$  に対して,  $\sigma$  の  $k-1$  次元面全体の集合を  $\partial\sigma$  と書き,  $\text{Int}\sigma = \sigma - \partial\sigma$  とおく。 $\partial\sigma$  を  $\sigma$  の境界といい,  $\text{Int}\sigma$  を  $\sigma$  の内部という。 $\partial\sigma$  は  $k$  次元の  $k$  角形  $\sigma$  の表面である。

次に  $K$  を単体の集合とする。 $K$  が次の三つの条件をみたすとき,  $K$  を単体的複体または複体という。

(1)  $\sigma$  を  $K$  の元とすると,  $\sigma$  の面はすべて  $K$  の元である。

(2)  $\sigma, \tau$  を  $K$  の二つの元とし,  $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$  とすると,  $\sigma \cap \tau$  は  $\sigma$  および  $\tau$  の共通の面である。

(3)  $K$  の任意の単体  $\sigma$  に対して,  $\sigma$  と交わる  $K$  の単体は有限個である (この条件を局所有限性という)。

単体的複体  $K$  の部分集合でありながら, それ自身単体的複体であるものを,  $K$  の部分複体という。また  $K$  に対して  $K$  の次元  $\dim K$  を

$$\dim K = \max\{k \mid \sigma^k \in K\}$$

とおく。すなわち,  $\dim K$  は  $K$  に含まれる単体の次元の最大値である。最大値がないときは無限次元とする。

単体的複体の定義において,  $K$  は単体の集合であるが,  $K$  を点集合としての単体の和集合とみなしたものを,  $|K|$  と書き,  $K$  の多面体という。すなわち,  $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$  である (図 1.2)。

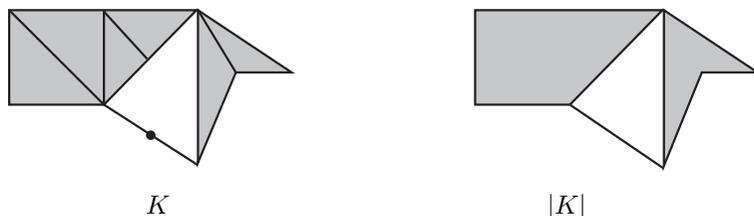


図 1.2

## 1.2 星状近傍

$K$  を単体的複体とし,  $x$  を  $|K|$  の任意の点とする。

$$\text{Fc}(x; K) = \{\tau \in K \mid x \in \tau\}$$

とおく。 $\text{Fc}(x; K)$  は  $x$  を含む  $K$  の単体全体である。そこで,

$$\text{St}(x; K) = \{\tau \in K \mid \tau \preceq \delta \text{ となる } \delta \in \text{Fc}(x; K) \text{ が存在する}\}$$

$$\text{Lk}(x; K) = \{\tau \in \text{St}(x; K) \mid x \cap \tau = \emptyset\}$$

とおく。

$Fc(x; K)$  は単体的複体とは限らないが,  $St(x; K), Lk(x; K)$  はともに  $K$  の部分複体となる。このとき,  $St(x; K)$  を  $x$  の  $K$  における星状複体,  $Lk(x; K)$  を  $x$  の  $K$  における絡み複体という。また多面体  $|St(x; K)|$  を  $x$  の多面体  $|K|$  における星状近傍,  $|Lk(x; K)|$  を絡み近傍という。 $K$  の単体  $\sigma$  に対して,  $Fc(\sigma; K) = \{\tau \in K \mid \sigma \preceq \tau\}$  とおき,  $x$  を  $\sigma$  におきかえることによって, 星状複体  $St(\sigma; K)$ , 絡み複体  $Lk(\sigma; K)$ , 星状近傍  $|St(\sigma; K)|$ , および絡み近傍  $|Lk(\sigma; K)|$  が定義される (問題 1.1)。

さらに一般に,  $K$  の部分複体  $L$  に対して,

$$St(L; K) = \bigcup_{\sigma \in L} St(\sigma; K)$$

$$Lk(L; K) = \{\tau \in St(L; K) \mid \tau \cap L = \emptyset\}$$

とおき, これらをそれぞれ  $L$  の  $K$  における星状複体, 絡み複体という。また,  $|St(L; K)|$  および  $|Lk(L; K)|$  をそれぞれ多面体  $|L|$  の多面体  $|K|$  における星状近傍および絡み近傍という (図 1.3)。

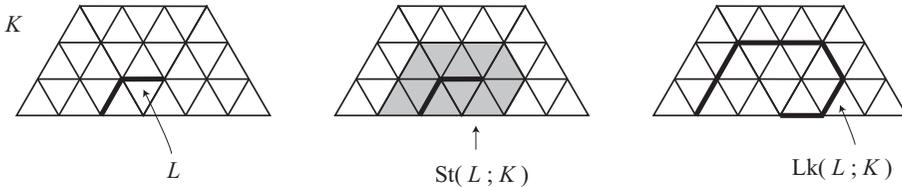


図 1.3

**問題 1.1**  $\sigma$  を複体  $K$  のある単体とする。このとき,  $St(\sigma; K)$  および  $Lk(\sigma; K)$  は  $K$  の部分複体であることを示せ。また  $Fc(\sigma; K)$  が  $K$  の部分複体とは限らないという理由を述べよ。

### 1.3 複体の細分

$K$  を単体的複体とする。単体的複体  $K'$  が次の二つの条件をみたすとき,  $K'$  は  $K$  の細分であるという。

- (1)  $|K'| = |K|$ 。
- (2)  $K'$  の任意の単体に対して, それを含む  $K$  の単体が存在する。

図 1.4 において,  $K_1, K_2$  はともに  $K$  の細分である。細分のとり方はいろいろあるが, その中でも特に重要なのが, 次に述べる重心細分である。

$k$  次元単体  $\sigma = \langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle$  に対して,

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{k+1}(a_0 + a_1 + \dots + a_k)$$

を  $\sigma$  の重心という。ここで各  $a_i$  は  $R^n$  内の点  $a_i = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$  なので, これらの和は各座標の和を意味する。そこで,

$$\text{Sd}(\sigma) = \left\{ \langle \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_\ell \rangle \mid \begin{array}{l} \text{ただし } \sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \dots \prec \sigma_\ell \preceq \sigma \text{ は} \\ \sigma \text{ の面の列すべて} \end{array} \right\}$$

とおくと、これは単体的複体としての  $\sigma$  の細分になる (問題 1.2)。さらに単体的複体  $K$  に対して、

$$\text{Sd}(K) = \bigcup_{\sigma \in K} \text{Sd}(\sigma)$$

とおくと、これは  $K$  の細分となる。この  $\text{Sd}(K)$  を  $K$  の重心細分という。図 1.4 において、 $K_1$  は  $K$  の一般的な細分、 $K_2$  は重心細分である。

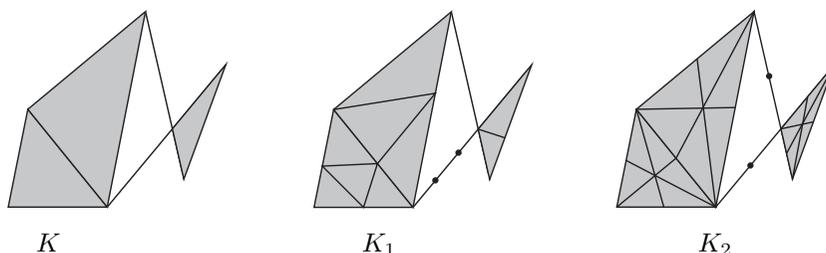


図 1.4

$\text{Sd}(K)$  をさらに重心細分したものを  $\text{Sd}(\text{Sd}(K))$  を  $\text{Sd}^2(K)$  と書く。以下帰納的に  $K$  の  $n$  回重心細分を定義し  $\text{Sd}^n(K)$  と書く。ただし、 $\text{Sd}^0(K) = K$ ,  $\text{Sd}^1(K) = \text{Sd}(K)$  である。

**問題 1.2**  $\text{Sd}(\sigma)$  が  $\sigma$  の細分であることを示せ。また  $\text{Sd}(K)$  が  $K$  の細分であることを示せ。

任意の単体  $\sigma$  に対して、

$$\text{diam}(\sigma) = \max\{|x - y| \mid x, y \in \sigma\}$$

とおく。 $|x - y|$  は  $x$  と  $y$  のユークリッド空間における距離である。 $\sigma$  はコンパクトであり、 $|x - y|$  は  $\sigma$  で定義された連続関数なので、その最大値が存在する。これを  $\sigma$  の直径という。実は  $\text{diam}(\sigma)$  は  $\sigma$  のある 1 次元面の長さに一致する。次に単体的複体  $K$  に対して、

$$\text{mesh}(K) = \max\{\text{diam}(\sigma) \mid \sigma \in K\}$$

とおく。すなわち、 $\text{mesh}(K)$  は  $K$  に含まれる単体の直径の最大値である。最大値がないときは無限大とする。

**定理 1.1**  $K$  を  $m$  次元単体的複体 ( $\dim K = m$ ) とし、 $\text{mesh}(K)$  が有限とする。このとき、次が成り立つ。

$$\text{mesh}(\text{Sd}(K)) \leq \frac{m}{m+1} \text{mesh}(K)$$

したがって、 $\text{mesh}(\text{Sd}^n(K)) \leq \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \text{mesh}(K)$  が成り立ち、次を得る。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mesh}(\text{Sd}^n(K)) = 0$$

これは重心細分を繰り返すと、各単体が小さくなっていくことを意味しており、直感的には理解しやすいことと思う。

次の定理は共通細分定理とよばれるものである。

**定理 1.2**  $K_1, K_2$  を単体的複体とし、 $|K_1| = |K_2|$  とする。このとき  $K_1$  の細分であり、 $K_2$  の細分でもある単体的複体  $K_3$  が存在する。この  $K_3$  を  $K_1$  と  $K_2$  の共通細分という。

## 1.4 単体写像

$K$  と  $L$  を単体的複体とする。連続写像  $f: |K| \rightarrow |L|$  が次の二つの条件をみたすとき、 $f$  を  $K$  から  $L$  への単体写像という。

- (1)  $K$  の任意の単体  $\sigma$  に対して、 $f(\sigma)$  は  $L$  の単体である。
- (2)  $\sigma$  の点  $x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$  に対して、 $f(x) = \lambda_0 f(a_0) + \lambda_1 f(a_1) + \cdots + \lambda_k f(a_k)$  である。

条件 (2) において、 $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_k)$  の中には重複があってもよいことに注意されたい。同相写像であるような単体写像があるとき、 $K$  と  $L$  は (単体的複体として) 同形という。

単体写像とは限らない連続写像  $f: |K| \rightarrow |L|$  が次の条件 (3) をみたすとき、 $f$  を  $K$  から  $L$  への PL 写像 (Piecewise Linear: 区分的線形) という。

- (3)  $f: |K_1| \rightarrow |L_1|$  が単体写像となるような  $K, L$  の細分  $K_1, L_1$  が存在する。

$|K| = |K_1|, |L| = |L_1|$  なので、単体写像は PL 写像である。

次に、連続写像  $f: |K| \rightarrow |L|$  が  $K, L$  のどのような細分に対しても、単体写像とはならない場合も考えられる。しかしこのときは、以下のように、ある PL 写像で近似することができる。まず  $|K|$  の任意の点  $x$  に対して、

$$\text{Os}(x; K) = \{\text{Int}\sigma \mid \sigma \in \text{Fc}(x; K)\}$$

とおく。この  $\text{Os}(x; K)$  を  $x$  の  $K$  における開星状体という。そこで、連続写像  $f: |K| \rightarrow |L|$  に対して、単体写像  $g: |K| \rightarrow |L|$  で、任意の  $K$  の頂点  $a$  に対して、 $f(\text{Os}(a; K)) \subset \text{Os}(g(a); L)$  が成り立つものを  $f$  の単体近似という。このとき次が成り立つ。

**命題 1.3** 連続写像  $f: |K| \rightarrow |L|$  に対して、 $f$  の単体近似  $g: |K| \rightarrow |L|$  は  $f$  にホモトピックである。

**定理 1.4 (単体近似定理)**  $K$  を有限個の複体からなる単体的複体とし、 $L$  を任意の単体的複体とする。任意の連続写像  $f: |K| \rightarrow |L|$  に対して、ある自然数  $n$  が存在し、 $r \geq n$  ならば  $f: |\text{Sd}^r(K)| \rightarrow |L|$  に対する単体近似  $g: |\text{Sd}^r(K)| \rightarrow |L|$  が存在する。

命題 1.3 と定理 1.4 より  $|K|$  がコンパクトならば、任意の連続写像  $f: |K| \rightarrow |L|$  は、ある PL 写像  $g: |K| \rightarrow |L|$  にホモトピックであるといえる。

さてここまでは、図形はすべてあるユークリッド空間内にあるとしてきたが、ここで、 $X$  を一般の位相空間とする。 $X$  に対して単体的複体  $K$  と、同相写像  $f: |K| \rightarrow X$  が存在するとき、 $(K, f)$  または  $K$  を、 $X$  の **3** 角形分割という。またこのとき、 $X$  は **3** 角形分割可能という。この定義より、 $K$  は多面体  $|K|$  の 3 角形分割となる。

3 角形分割可能な二つの位相空間  $X, Y$  と連続写像  $h: X \rightarrow Y$  に対して、 $X, Y$  の 3 角形分割  $(K, f), (L, g)$  で、 $g^{-1} \circ h \circ f: |K| \rightarrow |L|$  が単体写像、または PL 写像となるものがあるとき、 $h$  を単体写像または PL 写像という。特に  $h$  が同相写像であるとき、 $X$  と  $Y$  は PL 同相という。

写像の合成については次の命題が成り立つ。これは定理 1.2 を用いて証明される。

**命題 1.5**  $X, Y, Z$  を 3 角形分割可能な位相空間とする。 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  がともに PL 写像ならば、その合成写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  も PL 写像である。

## 1.5 オイラー標数

$K$  を有限個の複体からなる単体的複体とし  $\dim K = n$  とする。また  $K$  の  $p$  次元単体全体の個数を  $\alpha_p$  とする。このとき、

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha_p$$

という式で定義される値を  $K$  のオイラー標数といい  $\chi(K)$  と書く。

次に  $K$  の整数係数  $p$  次元ホモロジー群を  $H_p(K; \mathbf{Z})$  とする。この群は有限生成アーベル群なのでアーベル群の基本定理より、

$$H_p(K; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{t_1} \oplus \mathbf{Z}_{t_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{t_\ell}$$

と表すことができる。ここで  $\mathbf{Z}$  は無限巡回群であり  $\mathbf{Z}_{t_j}$  は位数  $t_j$  の巡回群である。 $H_p(K; \mathbf{Z})$  に含まれる  $\mathbf{Z}$  の個数を  $K$  の  $p$  次元ベッチ数とよび  $\beta_p$  と書く。このとき次が成り立つ。

**定理 1.6** (オイラー・ポアンカレ関係式)

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p \beta_p$$

## 第2章

# 組合せ多様体

本章も1章に引き続き、基本的な用語や概念を定義し、いくつかの基本定理を証明なしに紹介する。より詳しくは [1], [4], [11] 等を参照されたい。

多様体という言葉は、一般に各点の近傍がユークリッド空間と同相であるような位相空間を意味するが、さらに単体的複体としての構造をもつものを、組合せ多様体という。

### 2.1 組合せ多様体の定義

$K$  を単体的複体とする。次の条件 (1) が成り立つとき、多面体  $|K|$  を  $n$  次元組合せ多様体という。

(1)  $|K|$  の任意の点  $x$  に対して、その絡み近傍  $|\text{Lk}(x; K)|$  が、 $n-1$  次元単位球面、または  $n-1$  次元単位球体に同相。

一般に、3 角形分割可能な位相空間  $M$  に対して、その 3 角形分割を与える単体的複体  $K$  で上記の条件をみたすものがあるとき、 $M$  を  $n$  次元組合せ多様体という。また便宜上  $M = |K|$  と考え、誤解の生じる恐れのない限り、 $M$  の点と  $|K|$  の点を区別しないことにする。

多様体の定義より、 $M$  の各点に  $x$  に対して、 $|\text{Lk}(x; K)|$  は  $n-1$  次元球面、または  $n-1$  次元球体なので、

$$\partial M = \{ x \in M \mid |\text{Lk}(x; K)| \text{ は } n-1 \text{ 次元球体} \}$$

とおき、これを  $M$  の境界という。 $\partial M = \emptyset$  のとき、境界のない多様体、 $\partial M \neq \emptyset$  のとき、境界のある多様体という。 $M$  がコンパクトな位相空間であり、 $\partial M = \emptyset$  のとき、 $M$  を閉多様体という。組合せ多様体がコンパクトであることは、それが有限個の単体からなる 3 角形分割をもつことと同値である。「まえがき」において多様体という言葉は、各点の近傍がユークリッド空間と同相である位相空間を意味すると述べたが、それは次が成り立つことによる。

**定理 2.1 ([Ze])**  $M = |K|$  が  $n$  次元組合せ多様体であることは、次の条件 (2) が成り立つことと同値である。

(2)  $M$  の任意の点  $x$  に対して、星状近傍  $|\text{St}(x; K)|$  が、 $n$  次元単位球体に同相。

多様体の境界については次が成り立つ。

**定理 2.2**  $M$  をコンパクトな  $n$  次元組合せ多様体とする。 $\partial M \neq \emptyset$  ならば、 $\partial M$  は閉

$n-1$  次元組合せ多様体である。

$n$  次元組合せ多様体  $M$  の部分集合  $N$  が、次の条件 (\*) をみたすとき、 $N$  を  $M$  の ( $m$  次元) 部分多様体という。

(\*)  $M$  の 3 角形分割  $K$  と、 $K$  の部分複体  $L$  で、 $N = |L|$  であり、 $|L|$  が  $m$  次元組合せ多様体であるものが存在する。

この定義により、 $\partial M \neq \emptyset$  のとき、 $\partial M$  は  $M$  の  $n-1$  次元部分多様体である。 $n$  次元組合せ多様体  $M$  に対して、 $\text{Int}M = M - \partial M$  とおき、これを  $M$  の内部という。また  $\text{Int}M$  の点を、 $M$  の内点という。

## 2.2 正則近傍

$K$  を単体的複体とし、 $K$  の単体  $\tau$  が次の条件 (\*) をみたすとする。

(\*)  $\tau$  を面とする  $K$  の単体  $\sigma$  がただ一つ存在する。

このとき、 $\tau$  を  $K$  の自由な面という。またこのとき、 $K_1 = K - \{\sigma, \tau\}$  は単体的複体となる (問題 2.1)。この  $K_1$  を  $K$  から縮約によって得られた単体的複体といい、 $K \searrow K_1$  と書く。さらにこのような縮約を有限回行って得られた単体的複体  $K_n$  も、やはり  $K$  から縮約によって得られた単体的複体といい、 $K \searrow K_1 \searrow \cdots \searrow K_n$  または簡単に  $K \searrow K_n$  と書く (図 2.1)。

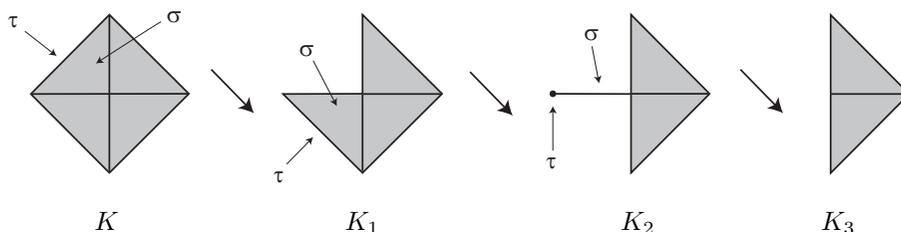


図 2.1

**問題 2.1** 縮約の定義において、 $K_1$  が単体的複体であることを示せ。

$M$  を  $n$  次元組合せ多様体とし、 $P$  を  $M$  内の多面体とする。このとき、次の条件 (1), (2) をみたす  $M$  内の  $n$  次元組合せ部分多様体  $N(P)$  を、 $P$  の正則近傍という。

(1)  $P \subset N(P) - \text{cl}(\partial N(P) - \partial M)$ 。

(2)  $M$  の 3 角形分割  $K$  と、 $K$  の部分複体  $K_0$  および  $L$  で、 $|K_0| = N(P)$ 、 $|L| = P$  であり、 $K_0 \searrow L$  となるものが存在する。

次の定理は、組合せ多様体内の多面体に対して、正則近傍の存在を保証するものである。

**定理 2.3**  $M = |K|$  を  $n$  次元組合せ多様体とし、 $L$  を  $K$  の部分複体とする。また、 $K''$ ,  $L''$  をそれぞれ  $K, L$  の 2 回重心細分によって得られる単体的複体とする。このとき、

$L''$  の  $K''$  における星状近傍  $|\text{St}(L''; K'')|$  は、多面体  $|L|$  の  $|K| = M$  における正則近傍である。

次の定理は、正則近傍の一意性を保証するものである。

**定理 2.4**  $M$  を  $n$  次元組合せ多様体、 $P$  を  $M$  内の多面体とし、 $N_1, N_2$  を  $P$  の二つの正則近傍とする。また、 $N_i \cap \partial M$  は  $P \cap \partial M$  の  $\partial M$  における正則近傍であるとする ( $i = 1, 2$ )。このとき、 $M$  のアンピエントイソトピー  $\{f_i\}: M \rightarrow M$  で、 $f_0 = \text{id}$  であり、 $f_1(N_1) = N_2$  となるものが存在する。

**系 2.5**  $M$  を  $n$  次元組合せ多様体、 $P$  を  $M$  内の多面体とする。 $P$  が 1 点に縮約可能ならば、 $P$  の任意の正則近傍は  $n$  次元球体に同相である。

**証明**  $N$  を  $P$  の正則近傍とする。正則近傍の定義より、 $N \searrow P$  である。また仮定より  $P \searrow \{1 \text{ 点}\}$  である。ゆえに  $N \searrow \{1 \text{ 点}\}$  である。ここで、定理 2.3 と 2.4 より、 $N$  は 1 点の星状近傍に同相である。しかも定理 2.1 より 1 点の星状近傍は  $n$  次元球体に同相である。よって、 $N$  は  $n$  次元球体に同相である。  $\square$

**系 2.6 (カラー近傍定理)**  $M$  を  $n$  次元組合せ多様体とし、 $\partial M \neq \emptyset$  とする。このとき、 $\partial M$  の正則近傍は  $\partial M \times I$  に同相である。この  $\partial M \times I$  を  $\partial M$  のカラー近傍という。

$M$  を  $n$  次元組合せ多様体とし、 $N$  を  $k$  ( $\leq n$ ) 次元組合せ多様体とする。連続写像  $f: N \rightarrow M$  が次の条件 (\*) をみたすとき、 $f$  をはめ込みという。

(\*)  $N$  の任意の点  $x$  に対して、 $x$  の正則近傍  $N(x)$  で  $f|_{N(x)}: N(x) \rightarrow f(N(x))$  が PL 同相写像となるものが存在する。

はめ込み  $f: N \rightarrow M$  に対して、 $f: N \rightarrow f(N)$  が PL 同相写像であるとき  $f$  を埋め込みといい、 $f(N)$  は  $M$  に埋め込まれているという。このとき、 $N$  と  $f(N)$  を区別せずに  $N$  を  $M$  の部分多様体と考えることもある。

次に  $M$  を  $n$  次元組合せ多様体とし、 $N$  を  $M$  の部分多様体とする。 $\text{Int}N \subset \text{Int}M$  であり  $\partial N \subset \partial M$  であるとき、 $N$  は  $M$  に適切に埋め込まれているといい、 $(N, \partial N) \subset (M, \partial M)$  と書く。

**定理 2.7**  $M$  を  $n$  次元組合せ多様体とし、 $N$  を  $M$  に適切に埋め込まれた部分多様体とする。このとき、 $N$  の正則近傍  $M_0$  で次の条件 (1), (2) をみたすものが存在する。

- (1)  $\partial N = \emptyset$  ならば  $M_0 \subset \text{Int}M$ 。
- (2)  $\partial N \neq \emptyset$  ならば  $M_0 \cap \partial M$  は  $\partial N$  の  $\partial M$  における正則近傍。

## 2.3 球面と球体に関する基本定理

$n$  次元単位球体に同相な  $n$  次元組合せ多様体を、 $n$  次元組合せ球体という。 $n$  次元単位球面に同相な  $n$  次元組合せ多様体を、 $n$  次元組合せ球面という。

**定理 2.8** ([Schö], [Bw])  $S$  を  $n$  次元組合せ球面とし,  $C$  を  $S$  の部分多様体であるような  $n-1$  次元組合せ球面とする。このとき,  $S-C$  は二つの連結成分  $B'_1, B'_2$  からなり, それらの  $S$  における閉包を  $B_1, B_2$  とすると,  $B_1, B_2$  はともに  $n$  次元組合せ球体であり,  $B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2 = C$  が成り立つ。

**定理 2.9**  $S$  を  $n$  次元組合せ球面とし,  $B_1, B_2$  を  $S$  内の互いに交わらない二つの  $n$  次元球体とする。このとき,  $\text{cl}(S - (B_1 \cup B_2)) = A$  とおくと,  $A \cong (n-1 \text{ 次元球面}) \times I$  である。

多様体の研究において, 境界上で定義された写像が内部にまで拡張するかどうかということがしばしば問題になるが, 次の定理はその基本となるものである。

**定理 2.10** ([A])  $B_1, B_2$  を  $n$  次元組合せ球体とし,  $f: \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$  をその境界上の PL 同相写像とする。このとき, PL 同相写像  $F: B_1 \rightarrow B_2$  で  $F|_{\partial B_1} = f$  となるものが存在する。

また以下が成り立つ。

**定理 2.11**  $B$  を  $n$  次元組合せ球体とし,  $C$  を  $B$  に適切に埋め込まれた  $n-1$  次元組合せ球体とする。このとき,  $B-C$  は二つの連結成分  $B'_1, B'_2$  からなり, それらの  $B$  における閉包を  $B_1, B_2$  とすると,  $B_1, B_2$  はともに  $n$  次元組合せ球体であり,  $B_1 \cap B_2 = \partial B_1 \cap \partial B_2 = C$  が成り立つ。

**定理 2.12**  $B_1, B_2$  を  $n$  次元組合せ球体とし,  $B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2$  とする。このとき,  $B_1 \cup B_2$  は  $n$  次元組合せ球面である。

**定理 2.13**  $B_1, B_2$  を  $n$  次元組合せ球体とし,  $B_1 \cap B_2 = \partial B_1 \cap \partial B_2$  は  $\partial B_i$  ( $i=1, 2$ ) 内の  $n-1$  次元組合せ球体とする。このとき,  $B_1 \cup B_2$  は  $n$  次元組合せ球体である。

## 2.4 部分多様体の交わりと一般の位置

平面上で二つの折れ線が交わっている状況を考えよう。図 2.2(1) のような交わりかたは一部の線分が接している。そこで一方の折れ線を少しずらすことにより, 図 2.2(2) のように 1 点で交わらせることができる。また図 2.3(1) のような場合もほんの少しずらすことにより, 交わりをなくすか, または図 2.3(2) のようにできる。このように, 平面上の二つの折れ線に対して, どちらかを少しずらすと, 各交差点において一方が他方を横切るようにできる。そしてこのとき, 二つの折れ線は横断的に交わっているという。

一般に,  $m$  次元多様体  $M$  の中に,  $n_1$  次元多様体  $N_1$  と  $n_2$  次元多様体  $N_2$  があるとし,  $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$  とする。また,  $R^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m)\}$  内の  $n_1$  次元面を  $R^{n_1} = \{(x_1, \dots, x_{n_1}, 0, \dots, 0)\}$ ,  $n_2$  次元面を  $R^{n_2} = \{(0, \dots, 0, x_{m-n_2+1}, \dots, x_m)\}$  とし,  $R^m$  の原点を  $O$ , 単位球体を  $B^m$  とする。 $N_1 \cap N_2$  内のある点  $x$  に対して,  $x$  の  $M$  における近

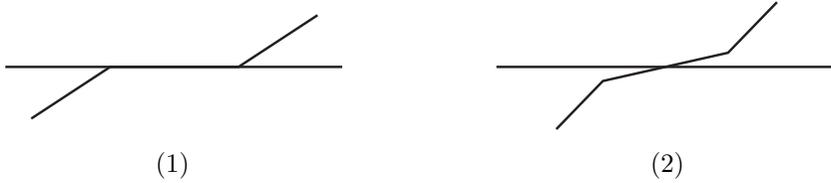


図 2.2

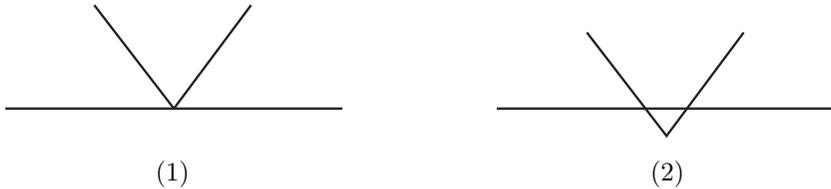


図 2.3

傍  $V$  と,  $(x, V, V \cap N_1, V \cap N_2)$  から  $(O, B^m, B^m \cap R^{n_1}, B^m \cap R^{n_2})$  への同相写像が存在するとき,  $N_1$  と  $N_2$  は  $x$  において横断的に交わっているという (図 2.4)。さらに  $N_1 \cap N_2$  の任意の点において,  $N_1$  と  $N_2$  が横断的に交わっているとき,  $N_1$  と  $N_2$  は横断的に交わっているという。

$\partial M$  における  $\partial M$  と部分多様体との横断性, および二つの部分多様体の横断性は,  $R_+^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_m \geq 0\}$  を考えることにより, 同様に定義される。

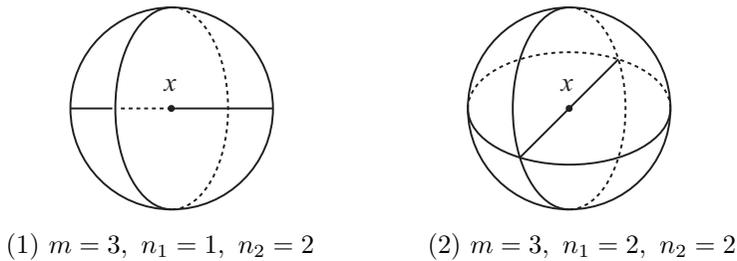


図 2.4

$N_1$  と  $N_2$  が横断的に交わっているとき,  $N_1 \cap N_2$  は  $\emptyset$  かまたは  $M$  内の  $n_1 + n_2 - m$  次元部分多様体になる。そしてこのようなとき,  $N_1$  と  $N_2$  は一般の位置にあるという。すなわち, 図 2.2(1) のような交わり方は特殊で不安定であり, それに対して, 図 2.2(2) のような交わり方のほうが, 一般的で安定しているというわけである。一般の位置という言葉は第 1 章で出てきたが, このような使い方もする。

3次元多様体内の2次元または1次元部分多様体の横断性については, 次が成り立つ。

**定理 2.14**  $M$  を 3次元組合せ多様体とし,  $N_1, N_2$  を  $M$  の 2次元部分多様体で,  $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$  とする。また  $C$  を  $N_1 \cap N_2$  を含む任意の開集合とする。このとき,  $M$  のアンビエントイソトピー  $\{f_t\}$  で,  $f_0 = \text{id}$ ,  $f_t|_{M-C} = \text{id}$  であり,  $f_1(N_1) \cap N_2$  の各連結成分は  $M$  の 1次元部分多様体となるものが存在する。

この定理の証明は、まず  $M$  を十分細かく重心細分する。そうすると定理 1.1 より  $C$  に含まれるような  $N_1 \cap N_2$  の星状近傍が存在する。そこでその星状近傍内だけで  $N_1$  を動かし、その外側では動かさないようなアンビエントイソトピーで、 $N_1$  と  $N_2$  が横断的に交わるようにする。

次の定理も同様の方法で示される。

**定理 2.15**  $M$  を 3 次元組合せ多様体とし、 $N$  を  $M$  の 2 次元部分多様体、 $L$  を  $M$  の 1 次元部分多様体で、 $N \cap L \neq \emptyset$  とする。また  $C$  を  $N \cap L$  を含む任意の開集合とする。このとき、 $M$  のアンビエントイソトピー  $\{f_t\}$  で、 $f_0 = \text{id}$ ,  $f_t|_{M-C} = \text{id}$  であり、 $f_1(L) \cap N$  は有限個の点となるものが存在する。

次にコンパクトな多様体  $N$  から多様体  $M$  への PL 写像  $f: N \rightarrow M$  について考えよう。

$$S'(f) = \{x \in N \mid f^{-1}(f(x)) \text{ は } x \text{ 以外の点を含む}\},$$

$$S(f) = \text{cl}(S'(f); N)$$

とおく。 $S(f)$  の点を  $f$  の特異点とよぶ。また  $S_1(f) = S(f) - S'(f)$  とおき、2 以上の自然数  $i$  に対して

$$S_i(f) = \{x \in N \mid f^{-1}(f(x)) \text{ は } i \text{ 個の点からなる集合}\}$$

とおく。このとき次が成り立つ。

**定理 2.16**  $N$  をコンパクトな 2 次元多様体とし、 $M$  を 3 次元多様体とする。また  $f: N \rightarrow M$  を PL 写像とし、 $C$  を  $f(S(f))$  を含む任意の開集合とする。このとき次の条件 (\*) をみたすホモトピー  $\{f_t\}: N \rightarrow M$  が存在する。

(\*)  $f_0 = f$ ,  $f_t(N) \subset f(N) \cup C$  であり、 $g = f_1$  とおくと、 $g$  は  $S(g) = S_1(g) \cup S_2(g) \cup S_3(g)$  をみたす PL 写像。

定理 2.16 の条件 (\*) における三つの特異点集合  $S_1(g), S_2(g), S_3(g)$  に対して、それらの像  $g(S_1(g)), g(S_2(g)), g(S_3(g))$  をそれぞれ  $g$  の分岐点, **2** 重点, **3** 重点という (図 2.5)。  $S_1(g), S_3(g)$  はそれぞれ  $N$  内の有限個の点からなる集合である。また、定理 2.16 の条件  $S(g) = S_1(g) \cup S_2(g) \cup S_3(g)$  をみたす PL 写像を、一般の位置写像という。したがって、2 次元多様体からののはめ込みと埋め込みは、ともに一般の位置写像である。

上記の定理 2.14, 2.15, 2.16 は、3 次元多様体内の 1 次元多様体または 2 次元多様体の交わりを考察する際には、必ず必要となる。しかしこれらを引用するときは、「一般の位置の議論により」という述べ方をすることがある。

## 2.5 多様体の向き

$\sigma = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$  を  $n$  次元単体とする。 $\sigma$  は  $n+1$  個の点を頂点とする単体であるが、これらの頂点の並べ方まで考えることにする。そして、これらを並べた順列すべてを考

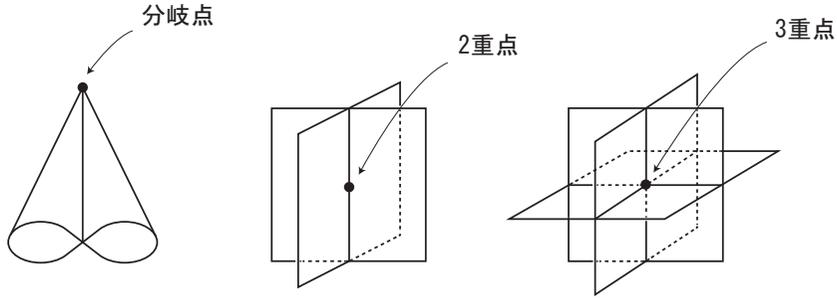


図 2.5

え、それらのうち、偶置換で移り合うものを同じ向き、奇置換で移り合うものを逆向きと定める。これによって、単体に一つの向きが定まる。 $\sigma$  と逆向きのものを  $-\sigma$  と書く。たとえば  $\sigma = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$  とすると、 $\langle a_1, a_0, a_2, \dots, a_n \rangle = -\sigma$  である。 $\sigma$  は  $n+1$  個の  $n-1$  次元面をもつが、そのうち、 $\{a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\}$  を頂点とするものの向きを  $(-1)^i \langle a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$  と定める。これを  $\sigma$  から導かれた向きという。

今、向きの付いた二つの  $n$  次元単体  $\sigma, \tau$  があり、 $\sigma \cap \tau$  は共通の  $n-1$  次元面になっているとする。 $\sigma$  から導かれた  $\sigma \cap \tau$  の向きと、 $\tau$  から導かれた  $\sigma \cap \tau$  の向きが逆であるとき、 $\sigma$  と  $\tau$  は同調しているという (図 2.6)。

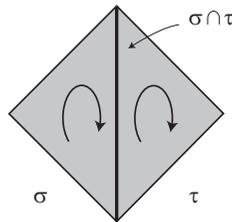


図 2.6

ここで、 $M = |K|$  を  $n$  次元組合せ多様体とする。また、 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  を  $K$  のすべての  $n$  次元単体とする。このとき、共通の  $n-1$  次元面をもつ任意の  $\sigma_i, \sigma_j$  に対して、 $\sigma_i$  と  $\sigma_j$  が同調しているように  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  全体に向きが付けられるとき、 $M$  を向き付け可能、そうでないとき、向き付け不可能という。このとき、次が成り立つ。

**定理 2.17**  $M$  をコンパクトな  $n$  次元組合せ多様体とする。 $M$  が向き付け可能であるための必要十分条件は、 $H_n(M, \partial M; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$  が成り立つことである。

$M, N$  を同相な二つの向き付け可能  $n$  次元組合せ多様体とし、 $M, N$  にそれぞれ向きを一つ指定する。同相写像  $f: M \rightarrow N$  に対して、 $N$  の向きと、 $f$  によって  $M$  の向きから定まる  $f(M) = N$  の向きが一致するとき、 $f$  を向きを保存する写像、そうでないとき向きを逆にする写像という。

ここで、 $B$  を  $n$  次元組合せ球体とし、 $B$  には向きが指定されているとする。このとき次

が成り立つ。

**定理 2.18**  $f: B \rightarrow B$  を向きを保存する自己同相写像とすると,  $f$  は  $B$  上の恒等写像にイソトピックである。特に  $f|_{\partial B}$  が  $\partial B$  上の恒等写像ならば, イソトピーとして,  $\partial B$  上で恒等写像であるものがとれる。

さて, 次章より多様体について具体的に学ぶ。本書では多様体を組合せ的观点から研究するので, 多様体はすべて 3 角形分割されており, 写像はすべて PL 写像である。そのためこれ以降は, いちいち “組合せ” とか “PL” という言葉をつけないことにする。また図形もすべて 3 角形分割されているので, 図は本来折れ線で描くべきであるが, 誤解の生じる恐れのない限り, なめらかな曲線等で描く。また, 本書を通して多様体は, 特に断りのない限り連結とする。

## 第3章

# 1次元多様体と2次元多様体

本章において、1次元多様体および2次元多様体の分類定理を紹介する。1次元多様体は種類が少なく、分類定理の証明は比較的容易である。2次元多様体の分類定理は、一般に閉曲面の分類といわれる定理で、[4] や [7] などに詳しい証明が書かれている。本章では、3次元多様体を学ぶ準備としてこれらの結果を紹介する。2章の最後でも述べたように、これ以降は“組合せ”や“PL”という言葉は省略するので、図形はすべて単体的複体であり、写像はすべてPL写像であることに注意されたい。また多様体は、特に断りのない限り連結としている。

### 3.1 1次元多様体

$I = [0, 1]$  を  $R^1$  における単位区間とし、 $S^1$  を  $R^2$  における単位円周とする。 $I$  は境界のあるコンパクトな1次元多様体であり、 $S^1$  は境界のないコンパクトな1次元多様体（閉1次元多様体）である。一般に  $I$  に同相な1次元多様体をすべて弧といい、 $S^1$  に同相な1次元多様体をすべて円周または単純閉曲線という。このとき次が成り立つ。

**定理 3.1**  $M$  をコンパクトな1次元多様体とすると、 $M$  は弧または円周に同相である。

### 3.2 向き付け可能2次元多様体

$B^2$  を2次元単位球体、 $S^2$  を2次元単位球面とする。 $B^2$  は境界のあるコンパクトな2次元多様体であり、 $S^2$  は境界のないコンパクトな2次元多様体（閉2次元多様体）である。一般に  $B^2$  に同相な2次元多様体をすべて2次元円板といい、 $S^2$  に同相な2次元多様体をすべて2次元球面という。

二つの多様体の直積空間は多様体であり、その次元はもとの多様体の次元の和になる。そこで、閉1次元多様体  $S^1$  を二つ用意し、その直積空間  $S^1 \times S^1$  を考える。これは閉2次元多様体であり、トーラス（輪環面）とよばれる。具体的には図3.1のような浮き輪のことである。なぜなら、図の中に描かれた二つの円周  $S_1, S_2$  は、ちょうど1点で交わっているのので、この浮き輪は二つの円周の直積空間であるといえる。

一般に自然数  $g$  に対して、トーラスを  $g$  個くっつけた2次元多様体を、種数  $g$  の向き付け可能閉曲面といい、 $F_g$  と書く（図3.2）（くっつけるという言葉の正確な意味は問題3.1のあとで述べる）。また  $F_0 = S^2$  とする。

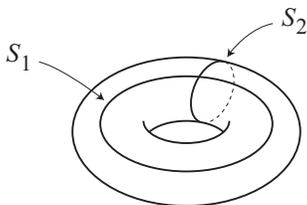


図 3.1

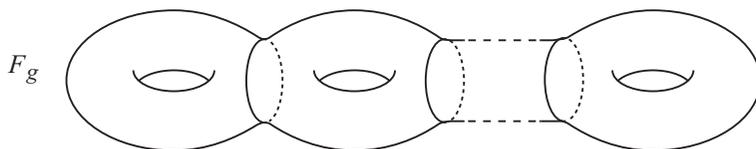


図 3.2

このとき次が成り立つ。

**定理 3.2**  $M$  を向き付け可能閉2次元多様体とすると、 $M$  はある  $F_g$  に同相である。また、 $\chi(\cdot)$  をオイラー標数とすると、 $\chi(F_g) = 2 - 2g$  である。

これ以降2次元多様体のことを曲面とよび、閉2次元多様体のことを閉曲面とよぶ。

ここで、ある閉曲面  $F$  に対して、 $F$  中にある（小さな）2次元円板を考え、それを  $D$  とし、 $F$  から  $D$  の内部  $IntD$  を除いたものを  $F'$  とする。 $F'$  は境界が一つの円周であるようなコンパクトな曲面である。これを逆に考えると、境界が一つの円周であるようなコンパクトな曲面  $F'$  に、2次元円板  $D$  をその境界で貼り合わせるにより（正確には同相写像によって同一視することにより）、閉曲面  $F$  が得られる。同様の考察と定理 3.2 を用いて、次を示せ。

**問題 3.1** 境界が  $n$  個の円周からなる、コンパクトな向き付け可能2次元多様体は、ある  $F_g$  から、 $n$  個の2次元円板の内部を取り除いたものに同相である。

さて、 $F_g$  の定義においてあらわれた“くっつける”という言葉の意味は以下のとおりである。

$T_1, T_2$  を二つのトーラスとし、 $D_1, D_2$  をそれぞれ  $T_1, T_2$  内のある2次元円板とする。また、 $T_1, T_2$  から  $D_1, D_2$  の内部を取り除いて得られるものを、 $T'_1, T'_2$  とする。 $T'_i = T_i - IntD_i = cl(T_i - D_i)$  ( $i = 1, 2$ ) である。 $T'_1, T'_2$  はそれぞれ境界が一つの円周であるような2次元多様体であるから、 $\partial T'_1$  と  $\partial T'_2$  の間の同相写像が存在する。その同相写像によって対応する点を同一視して、 $T'_1 \cup T'_2$  から得られる商空間を  $F_2$  とする (図 3.3)。これが“くっつける”という言葉の意味である。またこのとき、 $F_2$  は  $T_1$  と  $T_2$  の連結和、または連結和によって得られた曲面といい、 $F_2 = T_1 \# T_2$  と書く。この記号を用いると、トーラスは  $F_1$  なので、 $F_g = F_1 \# F_1 \# \dots \# F_1$  ( $g$  個の  $F_1$ ) と書くことができる。また一般に、 $g = g_1 + g_2$

のとき、 $F_g = F_{g_1} \# F_{g_2}$  が成り立つ。

先ほど、 $S^1 \times S^1$  に同相な2次元多様体をトーラスとよんだが、 $S^1 \times I$  に同相な2次元多様体のことをアニュラス（円環）とよぶ（図3.4）。これは定理2.9より、2次元球面から二つの2次元円板の内部を取り除いて得られるものに同相である。

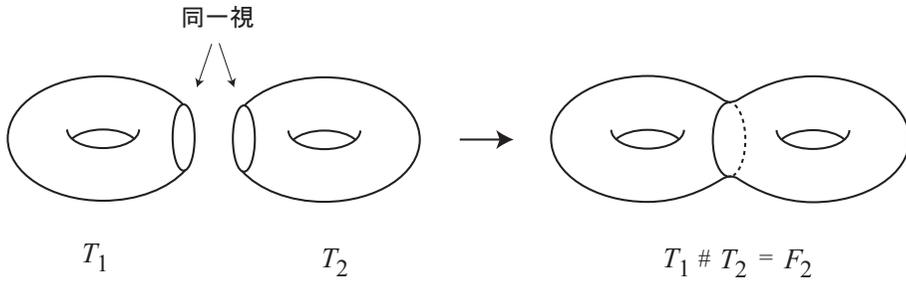


図 3.3

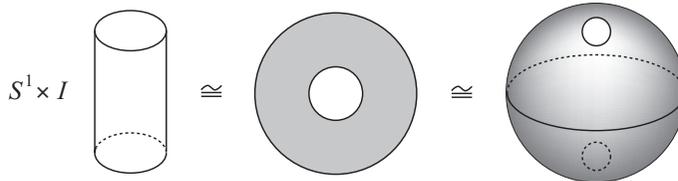


図 3.4

### 3.3 向き付け不可能2次元多様体

図3.5に描かれた長方形を考えよう。この長方形が薄いゴム膜できていると考えて、向かい合った二つの辺 AD と BC を、矢印の向きに沿って貼り合わせてできる2次元多様体を、モービウスの帯という。モービウスの帯を  $M$  とすると、 $H_2(M, \partial M; \mathbf{Z}) \cong \{0\}$  であって  $\mathbf{Z}$  ではないので、定理2.17より、 $M$  は向き付け不可能2次元多様体である。実際、モービウスの帯を3角形分割した場合、全体に同調するような向きを付けることはできない。

次に図3.6のようにやはり薄いゴム膜でできた長方形を考えよう。この長方形の四つの辺を図の矢印の向きに沿って、AB と DC, AD と BC を貼り合わせてできる2次元多様体を、クラインの壺\*という。

ただし、クラインの壺は3次元ユークリッド空間の中では実現できないので、図3.6では自己交差があるように、少しごまかして描いている。このクラインの壺も向き付け不可能2次元多様体である。しかもコンパクトであり境界がないので、向き付け不可能閉曲面である。

次に、 $B^2$  を2次元円板とし、 $B^2$  の直径の両端を A, B とする（図3.7）。そして、弧 AB と弧 BA を矢印の向きに沿って貼り合わせてできる2次元多様体を、射影平面といい  $P^2$

\* クラインの壺は、壺という名前が付いているが曲面であることに注意されたい。

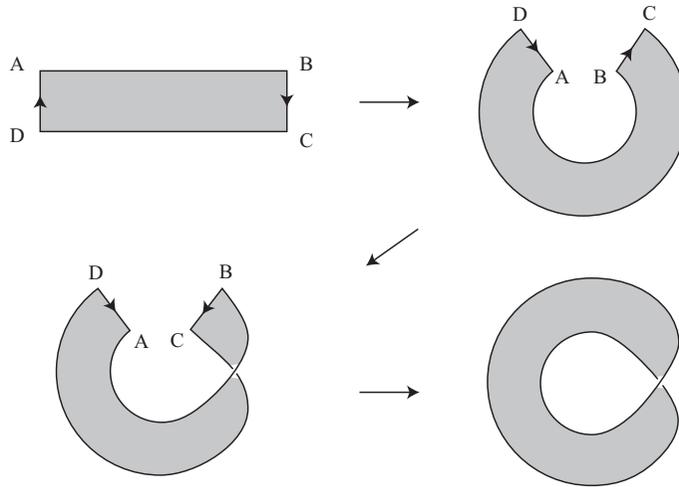


図 3.5

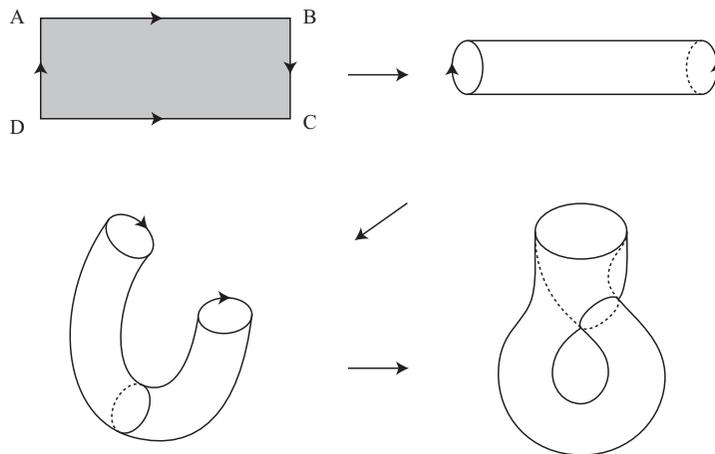


図 3.6

と書く。これも向き付け不可能閉曲面であり、3次元ユークリッド空間内では実現できない。クラインの壺と射影平面と、先のモービウスの帯の定義をよくみて、次を示せ。

**問題 3.2** (1) クラインの壺は、二つのモービウスの帯をその境界で貼り合わせて得られるものに同相である。

(2) 射影平面は、モービウスの帯と2次元円板をその境界で貼り合わせて得られるものに同相である。

問題 3.2 と 3.2 節における連結和の定義から、次の命題を得る。

**命題 3.3** クラインの壺は、二つの射影平面を連結和して得られる2次元多様体に同相である。

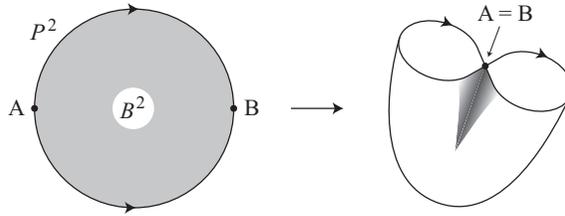


図 3.7

さて、自然数  $g$  に対して  $g$  個の射影平面を連結和して得られる 2 次元多様体を種数  $g$  の向き付け不可能閉曲面といい、 $N_g$  と書く。 $N_g = P^2 \# P^2 \# \cdots \# P^2$  ( $g$  個の  $P^2$ ) である。命題 3.3 よりクラインの壺は  $N_2$  に同相である。このとき、次が成り立つ。

**定理 3.4**  $M$  を向き付け不可能閉曲面とすると、 $M$  はある  $N_g$  に同相である。また、 $\chi(N_g) = 2 - g$  である。

この定理を用い、問題 3.1 と同様に次を示せ。

**問題 3.3** 境界が  $n$  個の円周からなる、コンパクトな向き付け不可能 2 次元多様体は、ある  $N_g$  から、 $n$  個の 2 次元円板の内部を取り除いたものに同相である。

## 第 4 章

# 基本的な 3 次元多様体

本章では、これから 3 次元多様体論を学ぼううえでしばしば現れる、基本的な 3 次元多様体を紹介する。

### 4.1 3 次元球体

$B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  を 3 次元単位球体という (図 4.1)。  $B^3$  に同相な 3 次元多様体をすべて **3 次元球体** という。

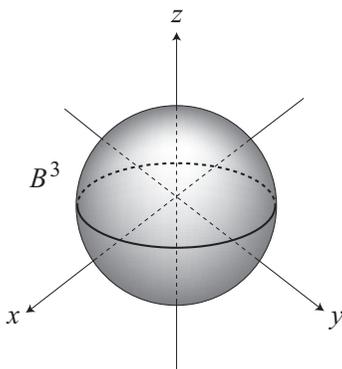


図 4.1

### 4.2 トーラス体

単位円周  $S^1$  と 2 次元円板  $B^2$  との直積空間  $S^1 \times B^2$  を考える。この 3 次元多様体を、トーラス体 (輪環体) という。これは中身の詰まった浮き輪、すなわちドーナツのことである (図 4.2)。その境界は  $\partial(S^1 \times B^2) = S^1 \times \partial B^2 = S^1 \times S^1$  よりトーラスである。  $S^1 \times B^2$  に同相な 3 次元多様体も、すべてトーラス体という。

### 4.3 ハンドル体

$B^3$  を 3 次元球体とする。  $g$  を自然数とし、  $\partial B^3$  上に  $2g$  個の 2 次元円板  $E_1^0, E_2^0, \dots, E_g^0, E_1^1, E_2^1, \dots, E_g^1$  をとる。ただし、これらはいずれも互いに交わらないものとする。

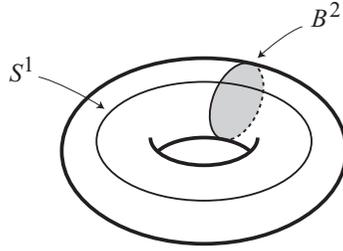


図 4.2

次に  $D_1, D_2, \dots, D_g$  を  $g$  個の 2 次元円板とする。  $I$  との直積空間  $D_1 \times I, D_2 \times I, \dots, D_g \times I$  を考え、  $D_i \times \{0\} = D_i^0, D_i \times \{1\} = D_i^1$  とおく ( $i = 1, 2, \dots, g$ )。  $D_i \times I$  は位相的には 3 次元球体である (問題 4.1)。

今  $g$  個の同相写像  $f_1 : D_1^0 \cup D_1^1 \rightarrow E_1^0 \cup E_1^1, f_2 : D_2^0 \cup D_2^1 \rightarrow E_2^0 \cup E_2^1, \dots, f_g : D_g^0 \cup D_g^1 \rightarrow E_g^0 \cup E_g^1$  を考える。ここで  $B^3, D_1 \times I, D_2 \times I, \dots, D_g \times I$  にあらかじめ向きを指定しておき、  $D_i^0, D_i^1, E_i^0, E_i^1$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ ) には、それらの向きから導かれる向きを与えておく。そして先の同相写像  $f_1, f_2, \dots, f_g$  はすべて向きを逆にするものとする。これだけの準備のもとに、  $B^3 \cup (D_1 \times I) \cup (D_2 \times I) \cup \dots \cup (D_g \times I)$  において  $f_1, f_2, \dots, f_g$  によって対応する点を同一視して得られる商空間を  $H_g$  と書き、これを種数  $g$  のハンドル体とよぶ (図 4.3)。

このような  $H_g$  の構成方法を、  $B^3$  にハンドル  $D_i \times I$  をくっつけるなどという。ただし、ここでの“くっつける”という言葉と、3.2 節におけるそれとでは、少し状況が違うので注意してほしい。今後もこの“くっつける”や“貼り合わせる”などという言葉が登場するが、常にそのための同相写像を考えていることを忘れないでほしい。また、  $B^3$  に  $D_i \times I$  をくっつけるための同相写像が向きを逆にするものとしたのは、  $B^3$  と  $D_i \times I$  の向きがそのまま、できあがった 3 次元多様体の向きとなるためである。

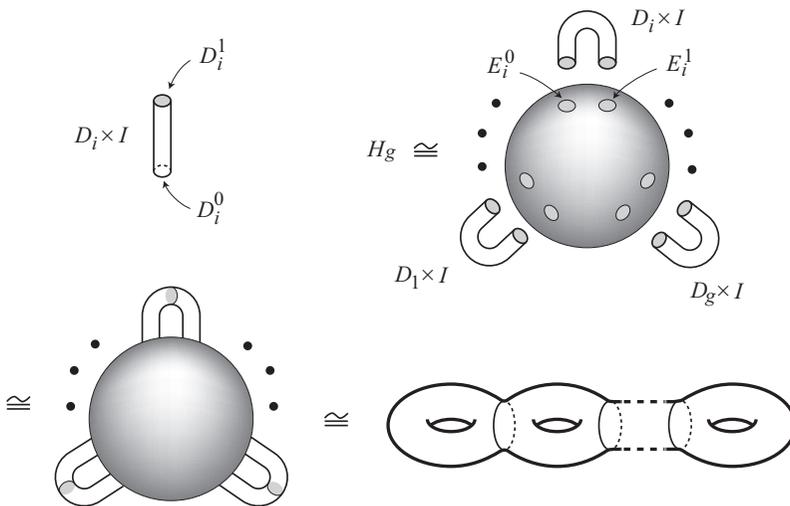


図 4.3

**問題 4.1**  $B^2$  を 2 次元円板とし,  $I$  を単位区間とすると,  $B^2 \times I$  は 3 次元球体に同相であることを示せ。

$H_g$  の定義において  $g > 0$  としたが,  $g = 0$  のときも考え,  $H_0 = B^3$  とする。また  $H_1$  に関しては次が成り立つ。

**命題 4.1**  $H_1$  はトーラス体に同相である。

**証明**  $I_1, I_2$  を二つの弧とする。 $S^1$  は二つの弧をその両端点でつないだものに同相なので,  $S^1 = I_1 \cup I_2$  ただし  $I_1 \cap I_2 = \partial I_1 = \partial I_2$  とおける。よって,  $S^1 \times B^2 = (I_1 \times B^2) \cup (I_2 \times B^2)$  である。

$H_1 = (D_1 \times I) \cup B^3$  を思い出そう。 $G_1 : D_1 \times I \rightarrow I_1 \times B^2$  を,  $I$  を  $I_1$  に,  $D_1$  を  $B^2$  にうつす同相写像とし,  $g_1 = G_1|_{D_1^0 \cup D_1^1} : D_1^0 \cup D_1^1 \rightarrow \partial I_1 \times B^2$  とおく。 $D_1^0$  と  $E_1^0$ ,  $D_1^1$  と  $E_1^1$  は  $H_1$  において  $f_1$  によって同一視されるので,  $g_1 \circ f_1^{-1} : (E_1^0 \cup E_1^1) \rightarrow \partial I_1 \times B^2 = \partial I_2 \times B^2$  は同相写像である。 $\text{cl}(\partial B^3 - (E_1^0 \cup E_1^1))$  はアニュラスであり,  $I_2 \times \partial B^2$  もアニュラスなので,  $f_1$  が向きを逆にする同相写像であることに注意すると,  $g_1 \circ f_1^{-1}$  は  $\partial B^3$  から  $\partial(I_2 \times B^2)$  への同相写像  $g_2 : \partial B^3 \rightarrow \partial(I_2 \times B^2)$  に拡張する。ここで問題 4.1 より  $I_2 \times B^2$  は 3 次元球体なので, 定理 2.10 を用いると,  $g_2$  は  $G_2 : B^3 \rightarrow I_2 \times B^2$  に拡張する。しかも  $G_1$  と  $G_2$  の構成方法により, それらは, つなぎ目である  $D_1^0 \cup D_1^1 = E_1^0 \cup E_1^1$  上では一致している。ゆえに  $G = G_1 \cup G_2 : (D_1 \times I) \cup B^3 \rightarrow S^1 \times B^2$  という同相写像が得られ, 種数 1 のハンドル体  $H_1$  とトーラス体が同相であることが示された。□

ところで,  $H_g$  は境界のある 3 次元多様体なので, その境界はある 2 次元多様体となるが, 次が成り立つ。

**命題 4.2**  $\partial H_g$  は種数  $g$  の向き付け可能閉曲面  $F_g$  に同相である。

**証明**  $g$  についての数学的帰納法で証明する。

$g = 0$  のとき,  $\partial H_0 = \partial B^3 = S^2 = F_0$  より命題は成り立つ。

$g > 0$  とし,  $\partial H_{g-1} \cong F_{g-1}$  とする。

$H_g$  の定義において,  $\partial B^3$  上に  $2g$  個の 2 次元円板をとるが,  $E_g^0, E_g^1$  とその他の  $2g - 2$  個の 2 次元円板を分離する,  $B^3$  に適切に埋め込まれた 2 次元円板を  $D$  とする (図 4.4)。

定理 2.11 により  $D$  は  $B^3$  を二つの 3 次元球体に分ける。よってハンドル体の定義により, この  $D$  は  $H_g$  を二つのハンドル体  $H_{g-1}$  と  $H_1$  に分ける。 $D$  による切り口は  $\partial H_{g-1}$  と  $\partial H_1$  にそれぞれ一つずつあるので, それらを  $D' \subset \partial H_{g-1}$ ,  $D'' \subset \partial H_1$  とする。ここで数学的帰納法の仮定より  $\partial H_{g-1} \cong F_{g-1}$  である。

一方, 命題 4.1 より  $H_1$  はトーラス体なので, その境界はトーラスであり,  $\partial H_1 \cong F_1$  である。ここで,  $H_g$  は  $H_{g-1}$  と  $H_1$  から  $D'$  と  $D''$  を貼り合わせることににより得られるので,  $\partial H_g$  は  $F_{g-1}$  と  $F_1$  から 3.2 節で定義した連結和によって得られる。

よって,  $\partial H_g \cong F_{g-1} \# F_1 \cong F_g$  であり, 数学的帰納法により命題は証明された。□

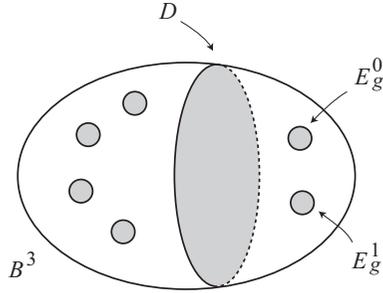


図 4.4

### 4.4 3次元球面

$S^3 = \{(x, y, z, w) \in R^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$  を 3次元単位球面という。また  $S^3$  に同相な 3次元多様体をすべて **3次元球面**という。この  $S^3$  は 4次元ユークリッド空間内にあり、3次元ユークリッド空間内では実現できないので、全体像を我々が見ることはできない。しかし以下のようにして、全体像を想像することができる。

$$S_+^3 = \{(x, y, z, w) \in R^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, w \geq 0\}$$

$$S_-^3 = \{(x, y, z, w) \in R^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, w \leq 0\}$$

とおく。すなわち、 $S_+^3$  は  $S^3$  において  $w$  が正または 0 の点全体、 $S_-^3$  は  $w$  が負または 0 の点全体である。今、 $S_+^3$  から  $B^3 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  への対応  $P_+ : S_+^3 \ni (x, y, z, w) \mapsto (x, y, z) \in B^3$  を考える。これは  $S_+^3$  から  $B^3$  への同相写像となる(問題 4.2)。同様に  $P_- : S_-^3 \ni (x, y, z, w) \mapsto (x, y, z) \in B^3$  も同相写像となるので、 $S_+^3, S_-^3$  はともに 3次元球体であることがわかる。ここで、

$$\begin{aligned} S_+^3 \cap S_-^3 &= \{(x, y, z, w) \in R^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, w = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\ &= S^2 = \partial B^3 \end{aligned}$$

に注意すると、 $S^3$  は二つの 3次元球体を、その表面で貼り合わせて得られる 3次元多様体であることがわかる。

**問題 4.2** 上記の  $P_+ : S_+^3 \rightarrow B^3, P_- : S_-^3 \rightarrow B^3$  が、ともに同相写像であることを示せ。

今  $S^3$  は、二つの 3次元球体を、その表面で貼り合わせて得られる 3次元多様体であると述べた。ここで貼り合わせるとは、その表面の間の同相写像を考えているわけである。上述の  $S^3 = S_+^3 \cup S_-^3$  は  $R^4$  の中で実際に貼り合わせる同相写像を意味している。しかし同相写像といっても一つとは限りらないので、どのような同相写像で貼り合わせても、できあがる多様体は  $S^3$  に同相であるということを示す必要がある。それが次の問題である。

**問題 4.3**  $B_1, B_2$  を二つの 3 次元球体とし,  $f: \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$  を同相写像とする.  $B_1$  と  $B_2$  から  $f$  によって対応する点を同一視して得られる 3 次元多様体を  $M$  とおく. このとき定理 2.10 を用いて,  $M$  は  $S^3$  に同相であることを示せ.

次に  $S^3$  を別の方法で見よう.

$$V_+ = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}\}$$

$$V_- = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

とおく.  $S^3$  の定義により  $S^3 = V_+ \cup V_-$  である.

$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ,  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  なので,

$$Q_+(x, y, z, w) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{2}z, \sqrt{2}w \right) \text{ とおくと,}$$

これは同相写像  $Q_+: V_+ \rightarrow S^1 \times D^2$  になる (問題 4.4). 同様に

$$Q_-(x, y, z, w) = \left( \sqrt{2}x, \sqrt{2}y, \frac{z}{\sqrt{z^2 + w^2}}, \frac{w}{\sqrt{z^2 + w^2}} \right)$$

とおくと, これも同相写像  $Q_-: V_- \rightarrow D^2 \times S^1$  になる. よって,  $V_+, V_-$  はともにトーラス体であることがわかる. ここで,

$$V_+ \cap V_- = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\}$$

より,  $Q_0(x, y, z, w) = (\sqrt{2}x, \sqrt{2}y, \sqrt{2}z, \sqrt{2}w)$  とおくと, これは同相写像  $Q_0: V_+ \cap V_- \rightarrow S^1 \times S^1$  となる (問題 4.4). ゆえに  $S^3$  は二つのトーラス体を, その表面のトーラスで貼り合わせて得られる 3 次元多様体であることがわかる.

**問題 4.4** 上記の  $Q_+, Q_-, Q_0$  が, 同相写像であることを示せ.

さて, 二つの 3 次元球体をその表面で貼り合わせた場合, 問題 4.3 より, どのような同相写像で貼り合わせても, できあがる 3 次元多様体は  $S^3$  である. しかし  $S^3$  が二つのトーラス体をその表面で貼り合わせて得られる 3 次元多様体であることについては, その貼り合わせ方に, ある一定の条件が必要となる. つまり, 貼り合わせの写像の選び方によっては,  $S^3$  には同相でない 3 次元多様体が生じる可能性があるのである. このことについては, 第 8 章で述べることにする.

## 4.5 積多様体

$S^1$  を円周とし,  $F$  をコンパクトな曲面とする. このとき,  $S^1$  と  $F$  との直積空間  $S^1 \times F$  はコンパクトな 3 次元多様体となる. これを  $S^1$  と  $F$  との積多様体という.

$F$  が閉曲面のときは,  $S^1 \times F$  も閉 3 次元多様体,  $F$  が境界をもつときは,  $S^1 \times F$  も境界のある 3 次元多様体となる. さらに  $F$  が向き付け可能なときは,  $S^1 \times F$  も向き付け可能,  $F$  が向き付け不可能なときは,  $S^1 \times F$  も向き付け不可能となる.  $F$  が 2 次元円板のときは,  $S^1 \times F$  はトーラス体である.  $F$  がトーラス  $S^1 \times S^1$  のときは,  $S^1 \times F = S^1 \times S^1 \times S^1$  となる. この多様体のことを, 3 次元トーラスという. 一般に自然数  $n$  に対して,  $S^1$  の  $n$  個の積  $S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$  を  $n$  次元トーラスということがある.

## 4.6 クラインの壺体

$B^2$  を2次元円板,  $I$  を単位区間とする。 $B^2 \times I$  に向きを指定し,  $B^2 \times \{0\}$  と  $B^2 \times \{1\}$  には, その向きから定まる向きを指定する。 $S^1$  は  $I$  の両端をつなげて得られるので, 4.2 節より,  $B^2 \times I$  から  $B^2 \times \{0\}$  と  $B^2 \times \{1\}$  を, 向きを逆にする同相写像で貼り合わせて得られるものがトーラス体である。そこで今度は,  $B^2 \times \{0\}$  と  $B^2 \times \{1\}$  を向きを保存する同相写像で貼り合わせて得られる3次元多様体を考え, これをクラインの壺体とよぶ (図 4.5)。これは向き付け不可能な3次元多様体である。本書は原則として, 向き付け可能な3次元多様体のみを考察の対象としているが, このクラインの壺体は時折登場することがある。

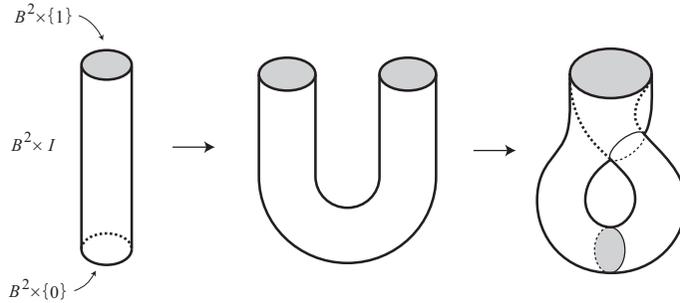


図 4.5

ここで  $M$  を3次元多様体とし,  $\alpha$  を  $M$  内の単純閉曲線,  $N(\alpha)$  をその正則近傍とする。このとき,  $N(\alpha)$  はトーラス体かまたはクラインの壺体となる。そこで,  $N(\alpha)$  がトーラス体のとき,  $\alpha$  を向きを保存する単純閉曲線といい,  $N(\alpha)$  がクラインの壺体のとき,  $\alpha$  を向きを逆にする単純閉曲線という。このとき次が成り立つ。

**定理 4.3** 3次元多様体  $M$  が向き付け可能であるための必要十分条件は,  $M$  内の任意の単純閉曲線が, 向きを保存することである。

以上で基本的な3次元多様体の紹介を終わる。

「鏡の中」 3次元多様体において, 向きを逆にする単純閉曲線というのは, その曲線に沿って進んで行くと, 戻ってきたときには左右が反対になっているような曲線のことである。たとえば宇宙空間内に, そのような単純閉曲線があったとする。そしてある人が宇宙船に乗って地球を出発し, その曲線に沿って戻ってきたとしよう。そのときその人は, 左右が全く正反対の人物になっている。つまり, 出発前にその人の鏡に写った姿が, 鏡から出てきた状態になっている。右のほくろは左になり, 右利きの人は左利きとなる。そしてその人の書く文字は, すべて左右が逆になっている。このときその人は, 出発前の人と同一人物といえるのであろうか。声や思考はどうなっているのであろうか。空想の世界は膨らむばかりである。

## 第5章

# ハンドル体の特徴付け

4.3 節においてハンドル体という 3 次元多様体を紹介したが、本章ではそのハンドル体について、より詳しく学ぶ。

### 5.1 平面曲面上の写像の拡張

本節では、次節で行うハンドル体の特徴付けの証明において必要となる補題を一つ示す。

$P, P'$  をともに、2次元球面から  $n$  個 ( $n \in \mathbf{N}$ ) の 2次元円板の内部を取り除いて得られる曲面とする。このような曲面は平面  $R^2$  に埋め込むことができるので、平面曲面といわれている。また、 $P, P'$  はともに向きが付けられており、 $\partial P, \partial P'$  には、 $P, P'$  の向きから導かれる向きが指定されているとする。

**補題 5.1**  $f: \partial P \rightarrow \partial P'$  を向きを保存する同相写像とすると、向きを保存する同相写像  $F: P \rightarrow P'$  で、 $F|_{\partial P} = f$  となるものが存在する。

**証明**  $\partial P = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ ,  $\partial P' = C'_1 \cup C'_2 \cup \dots \cup C'_n$  とおく。各  $C_i, C'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は円周である。補題を  $n$  についての数学的帰納法で示す。

$n = 1$  のとき、 $P, P'$  はともに 2次元円板なので、定理 2.10 より補題が成り立つ。

$n > 1$  とし、 $\partial P$  の連結成分の数が  $n - 1$  までのものに対しては、求める同相写像が存在すると仮定する。

$C_1, C_2$  内にそれぞれ点  $x_1, x_2$  をとり、また  $x_1$  と  $x_2$  を  $P$  内で結ぶ弧を任意に一つ指定し、それを  $\alpha$  とする。 $f(C_1), f(C_2)$  は  $\partial P'$  のうちの二つの連結成分なので、必要ならば添え字を付け変えることにより、 $f(C_1) = C'_1, f(C_2) = C'_2$  とおける。 $f(x_1) = x'_1, f(x_2) = x'_2$  とおくと、 $x'_1, x'_2$  はそれぞれ  $C'_1, C'_2$  に含まれる点である。 $x'_1$  と  $x'_2$  を  $P'$  内で結ぶ弧を任意に一つ指定し  $\alpha'$  とする。また、 $N(\alpha)$  を  $\alpha$  の  $P$  における正則近傍とする。 $N(\alpha) \cap C_1 = a_1, N(\alpha) \cap C_2 = a_2$  とおくと、 $a_1, a_2$  は  $x_1, x_2$  の  $C_1$  および  $C_2$  における正則近傍であり、 $f(a_1) = a'_1, f(a_2) = a'_2$  とおくと、 $a'_1, a'_2$  は  $x'_1, x'_2$  の  $C'_1$  および  $C'_2$  における正則近傍である。よって、 $\alpha'$  の  $P'$  における正則近傍  $N(\alpha')$  で、 $N(\alpha') \cap C'_1 = a'_1, N(\alpha') \cap C'_2 = a'_2$  となるものが存在する。また  $N(\alpha), N(\alpha')$  の向きは、 $P, P'$  のそれと同じとする (図 5.1)。

さて、 $a_1, a_2$  の向きは  $C_1, C_2$  のそれと同じ、 $a'_1, a'_2$  の向きは  $C'_1, C'_2$  のそれと同じとする。このときこれらの向きは、 $N(\alpha), N(\alpha')$  から導かれたものと一致し、 $f|_{a_1 \cup a_2}: a_1 \cup a_2 \rightarrow a'_1 \cup a'_2$  は向きを保存する写像である。よって、 $N(\alpha), N(\alpha')$  がそれぞれ

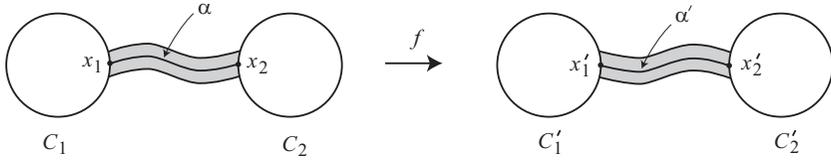


図 5.1

$\alpha \times I, \alpha' \times I$  に同相であることを注意すると,  $f|_{a_1 \cup a_2}$  は  $g : N(\alpha) \rightarrow N(\alpha')$  へと拡張し,  $f_1 = f \cup g$  とおくと,  $f_1 : \partial P \cup N(\alpha) \rightarrow \partial P' \cup N(\alpha')$  が得られる。ゆえに,  $P_1 = cl(P - N(\alpha)), P'_1 = cl(P' - N(\alpha'))$  とおくと,  $f_1|_{\partial P_1} : \partial P_1 \rightarrow \partial P'_1$  は向きを保存する同相写像である。ここで  $P_1, P'_1$  は, ともに 2次元球面から  $n - 1$  個の 2次元円板の内部を取り除いて得られる曲面なので, 帰納法の仮定から, 同相写像  $F_1 : P_1 \rightarrow P'_1$  で  $F_1|_{\partial P_1} = f_1|_{\partial P_1}$  となるものが存在する。

よって,  $F = F_1 \cup f_1$  とおくとこれが求める同相写像である。 □

### 5.2 完備メリディアン円板系

$M$  をコンパクトで, 向き付け可能な 3次元多様体,  $F$  を  $M$  に適切に埋め込まれた 2次元多様体とする。すなわち  $(F, \partial F) \subset (M, \partial M)$  である。 $N(F)$  を  $F$  の  $M$  における正則近傍で,  $\partial M \cap N(F)$  は  $\partial F$  の  $\partial M$  における正則近傍となるものとする。このとき,  $cl(M - N(F))$  を,  $M$  を  $F$  で切り開いて得られる 3次元多様体という。つまり  $M$  から  $N(F)$  を取り除くわけであるが, 切り口を開いたままにせず, 境界を付けた多様体というわけである。

$N(F)$  が  $F \times I$  に同相のとき,  $F$  は  $M$  において両側曲面であるといい, そうでないとき片側曲面という。

**補題 5.2**  $M$  を 3次元多様体とすると, 次が成り立つ。

- (1)  $M$  に適切に埋め込まれた 2次元円板は両側曲面である。
- (2)  $M$  に適切に埋め込まれた 2次元球面は両側曲面である。

**証明** はじめに (1) を示す。 $D$  を  $M$  に適切に埋め込まれた 2次元円板とし,  $N(D)$  を  $D$  の  $M$  における正則近傍とする。 $D$  は 1 点に縮約可能なので, 系 2.5 より  $N(D)$  は 3次元球体に同相である。よって  $D$  は 3次元球体  $N(D)$  に適切に埋め込まれた 2次元円板である。このときに定理 2.11 より  $D$  は  $N(D)$  を二つの 3次元球体に切り開く。それらを  $B_1, B_2$  とする。また,  $\partial B_1, \partial B_2$  上の  $D$  による切り口を  $D_1, D_2$  とする。このとき, 問題 4.1 より  $B_1, B_2$  はそれぞれ  $D_1 \times I, D_2 \times I$  に同相である。よってこれらの二つの  $I$  をつなげることにより,  $N(D)$  は  $D \times I$  に同相となる。すなわち  $D$  は両側曲面である。

次に (2) を示す。 $S$  を  $M$  に適切に埋め込まれた 2次元球面とし,  $x$  を  $S$  内のある点とする。 $x$  の正則近傍は 3次元球体なので, 特に  $S$  との交わりが, その 3次元球体に適切に埋め込まれた 2次元円板 ( $D$  とする) であるようなものが存在する。それを  $N(x)$  とする。す

なわち  $N(x) \cap S = D$  である。 $D' = \text{cl}(S - N(x))$ ,  $M' = \text{cl}(M - N(x))$  とおくと,  $D'$  は  $M'$  に適切に埋め込まれた 2 次元円板である。よって  $N(D')$  を  $D'$  の  $M'$  における正則近傍とすると, (1) より  $N(D')$  は  $D' \times I$  に同相である。また  $N(x)$  は  $D \times I$  に同相である。ゆえにこれらをつなげることにより,  $S$  の正則近傍として  $S \times I$  に同相なものを得る。すなわち  $S$  は両側曲面である。  $\square$

次の命題の証明は省略する。

**命題 5.3**  $M$  を 3 次元多様体とし,  $F$  を  $M$  に適切に埋め込まれた曲面とする。このとき, 次の (1), (2) が成り立つ。

- (1)  $M$  が向き付け可能であり,  $F$  も向き付け可能ならば,  $F$  は両側曲面である。
- (2)  $M$  が向き付け可能であり,  $F$  は向き付け不可能ならば,  $F$  は片側曲面である。

**例 1** 命題 5.3 より, トーラス体に適切に埋め込まれたメービウスの帯は片側曲面である (図 5.2)。

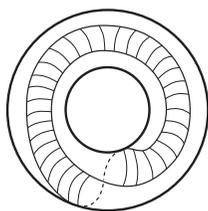


図 5.2

次の定理が, ハンドル体の特徴付けである。

**定理 5.4**  $M$  をコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体とする。

$M$  が種数  $g$  のハンドル体と同相であるための必要十分条件は,  $M$  に適切に埋め込まれた  $g$  個の 2 次元円板  $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_g$  で, 次の条件 (\*) をみたすものが存在することである。

(\*)  $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_g$  は互いに交わらず,  $M$  を  $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_g$  で切り開いて得られる 3 次元多様体は, 3 次元球体に同相。

**証明**  $H_g$  を 4.3 節で紹介した種数  $g$  のハンドル体とする。 $H_g = B^3 \cup (D_1 \times I) \cup (D_2 \times I) \cup \dots \cup (D_g \times I)$  である。ここで,  $D_i \times \{0\}, D_i \times \{1\}$  は  $\partial B^3$  上の 2 次元円板  $E_i^0, E_i^1$  と同一視されている ( $i = 1, 2, \dots, g$ )。今,  $D_1 \times \{\frac{1}{2}\}, D_2 \times \{\frac{1}{2}\}, \dots, D_g \times \{\frac{1}{2}\}$  という  $g$  個の 2 次元円板を考える。これらは互いに交わらず,  $H_g$  に適切に埋め込まれている。また,  $D_i \times I$  は  $D_i \times \{\frac{1}{2}\}$  の一つの正則近傍である。ゆえに,  $B^3$  は  $H_g$  を  $D_1 \times \{\frac{1}{2}\}, D_2 \times \{\frac{1}{2}\}, \dots, D_g \times \{\frac{1}{2}\}$  で切り開いて得られる 3 次元多様体である。

さて,  $M$  が  $H_g$  に同相とし,  $f: M \rightarrow H_g$  を同相写像とする。

$B = f^{-1}(B^3)$ ,  $\bar{D}_i = f^{-1}(D_i \times \frac{1}{2})$ ,  $N(\bar{D}_i) = f^{-1}(D_i \times I)$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ ) とおくと,  $M = B \cup N(\bar{D}_1) \cup N(\bar{D}_2) \cup \dots \cup N(\bar{D}_g)$  である。このとき,  $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_g$  は  $M$  に適切に埋め込まれた互いに交わらない 2 次元円板であり,  $N(\bar{D}_1), N(\bar{D}_2), \dots, N(\bar{D}_g)$

はそれらの正則近傍である。よって  $B$  は  $M$  を  $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_g$  で切り開いて得られる 3 次元多様体である。しかも  $B$  は 3 次元球体に同相である。したがって、この  $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_g$  が求める  $g$  個の 2 次元円板である。

次に  $M$  が条件 (\*) をみたす  $g$  個の 2 次元円板  $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_g$  をもつとする。また、 $N(\bar{D}_1), N(\bar{D}_2), \dots, N(\bar{D}_g)$  を互いに交わらないそれらの正則近傍とする。補題 5.2 より各  $N(\bar{D}_i)$  は  $\bar{D}_i \times I$  に同相である ( $i = 1, 2, \dots, g$ )。ゆえに  $D_i$  を  $H_g$  の定義における  $D_i$  とすると、 $N(\bar{D}_i)$  から  $D_i \times I$  への同相写像  $f_i : N(\bar{D}_i) \rightarrow D_i \times I$  が存在する。ここで  $M, H_g$  には向きが指定されており、 $N(\bar{D}_i), D_i \times I$  にはそれぞれ  $M, H_g$  からの向きが指定されているとする。また  $f_i$  はすべて向きを保存する同相写像とする。以下でこれらの同相写像  $f_1, f_2, \dots, f_g$  が  $M$  から  $H_g$  への同相写像に拡張することを示す。

$M$  を  $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_g$  で切り開いて得られる 3 次元多様体を  $B$  とする。 $B$  は 3 次元球体である。 $B \cap N(\bar{D}_i)$  は  $\partial B$  上の二つの 2 次元円板なので、 $\bar{E}_i^0, \bar{E}_i^1$  とおける ( $i = 1, 2, \dots, g$ )。  $f_1, f_2, \dots, f_g$  の作り方より  $f_i|_{E_i^0 \cup E_i^1} : \bar{E}_i^0 \cup \bar{E}_i^1 \rightarrow E_i^0 \cup E_i^1$  は同相写像である。ただしこの  $E_i^0 \cup E_i^1$  は、 $H_g$  の定義における  $E_i^0 \cup E_i^1$  である。今、

$$P = cl(\partial B - ((\bar{E}_1^0 \cup \bar{E}_1^1) \cup (\bar{E}_2^0 \cup \bar{E}_2^1) \cup \dots \cup (\bar{E}_g^0 \cup \bar{E}_g^1)))$$

$$P' = cl(\partial B^3 - ((E_1^0 \cup E_1^1) \cup (E_2^0 \cup E_2^1) \cup \dots \cup (E_g^0 \cup E_g^1)))$$

とおく。 $P, P'$  はともに、2 次元球面から  $2g$  個の 2 次元円板の内部を取り除いて得られる平面曲面である。 $f = (f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_g)|_{\partial P}$  とおくと、 $f : \partial P \rightarrow \partial P'$  は同相写像である。しかも  $\partial P, \partial P'$  にはそれぞれ  $P, P'$  から導かれる向きが指定されているので、 $f$  は向きを保存する同相写像である。よって補題 5.1 より、同相写像  $\bar{f} : P \rightarrow P'$  で  $\bar{f}|_{\partial P} = f$  となるものが存在する。そこで

$$f^* = \bar{f} \cup ((f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_g)|_{(\bar{E}_1^0 \cup \bar{E}_1^1) \cup (\bar{E}_2^0 \cup \bar{E}_2^1) \cup \dots \cup (\bar{E}_g^0 \cup \bar{E}_g^1)})$$

とおくと、 $f^* : \partial B \rightarrow \partial B^3$  は同相写像である。このとき定理 2.10 より、同相写像  $F_1 : B \rightarrow B^3$  で  $F_1|_{\partial B} = f^*$  となるものが存在する。よって、 $F = F_1 \cup f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_g$  とおくと、 $F : M \rightarrow H_g$  は同相写像となり定理の証明が終わる。  $\square$

さて、定理 5.4 における  $g$  個の 2 次元円板を、種数  $g$  のハンドル体の完備メリディアン円板系という。特に  $g = 1$  のときは、トーラス体のメリディアン円板という。3 次元多様体がハンドル体であるか否かは、この円板系があるかどうかで決まるといいうわけである。図 5.3 は、種数 5 のハンドル体とその完備メリディアン円板系を示している。

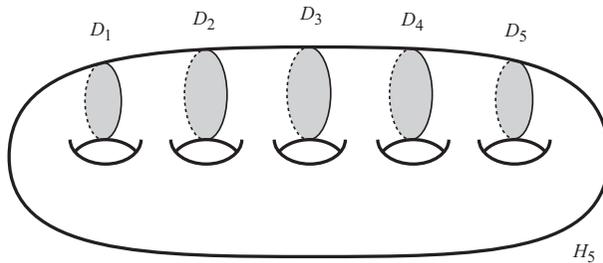


図 5.3

## 第6章

# ヒーガード分解

本章において、任意の向き付け可能閉3次元多様体  $M$  は、二つのハンドル体の和として表せることを学ぶ。これはいいかえると、 $M$  が二つのハンドル体へ分解されることであり、この分解をヒーガード分解とよぶ。

### 6.1 ヒーガード分解の定義

$V_1, V_2$  を同じ種数の二つのハンドル体とする。また  $V_1, V_2$  には向きが指定されており、 $\partial V_1, \partial V_2$  にはそれぞれ  $V_1, V_2$  から導かれる向きが指定されているとする。 $f: \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$  を向きを逆にする同相写像とし、 $f$  によって  $V_1$  と  $V_2$  をその表面で貼り合わせて得られる、向き付け可能閉3次元多様体を  $M$  と書く。 $M = V_1 \cup V_2$  であり、 $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$  である。 $f$  を強調するときは、 $M = V_1 \cup_f V_2$  と書くことがある。ここで  $\partial V_1 = \partial V_2 = F$  とおくと、 $F$  は  $M$  内の向き付け可能閉曲面であり、 $F$  は  $M$  を二つのハンドル体  $V_1, V_2$  に分けることになる。このとき、 $(V_1, V_2; F)$  または  $(V_1, V_2)$  を  $M$  のヒーガード分解とよび、 $F$  を  $M$  のヒーガード曲面という。また  $F$  の種数をそのヒーガード分解の種数という。

4.4 節より、 $S^3$  は種数0のヒーガード分解、および種数1のヒーガード分解をもつことがわかるが、さらに次が成り立つ。

**命題 6.1** 任意の正の整数  $g$  に対して、 $S^3$  は種数  $g$  のヒーガード分解をもつ。

**証明**  $S^3 = B_1 \cup B_2$  を、 $S^3$  の種数0のヒーガード分解とする。 $B_1, B_2$  はともに3次元球体であり、 $B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2$  である。 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$  を図6.1のように、 $B_1$  に適切に埋め込まれたまっすぐな  $g$  本の弧とする（“まっすぐ”という言葉の正確な意味は問題6.1で説明する）。 $N(\alpha_1), N(\alpha_2), \dots, N(\alpha_g)$  を  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$  の  $B_1$  における正則近傍とし、

$$V_1 = \text{cl}(B_1 - (N(\alpha_1) \cup N(\alpha_2) \cup \dots \cup N(\alpha_g)))$$

$$V_2 = B_2 \cup N(\alpha_1) \cup N(\alpha_2) \cup \dots \cup N(\alpha_g)$$

とおく。このとき、 $V_1, V_2$  はともに種数  $g$  のハンドル体であり（問題6.1）、 $S^3 = V_1 \cup V_2$ 、 $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$  より、 $(V_1, V_2)$  は  $S^3$  の種数  $g$  のヒーガード分解である。□

**問題 6.1** 命題6.1の証明において、 $V_1, V_2$  がともに種数  $g$  のハンドル体であることを示せ。ここで、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$  が“まっすぐ”という意味は、 $B_1$  内に次の条件(\*)をみたす、互いに交わらない  $g$  個の2次元円板  $D_1, D_2, \dots, D_g$  が存在することである。

(\*)  $\partial D_i = \alpha_i \cup \beta_i$  (2本の弧) であり、 $D_i \cap \partial B_1 = \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ )

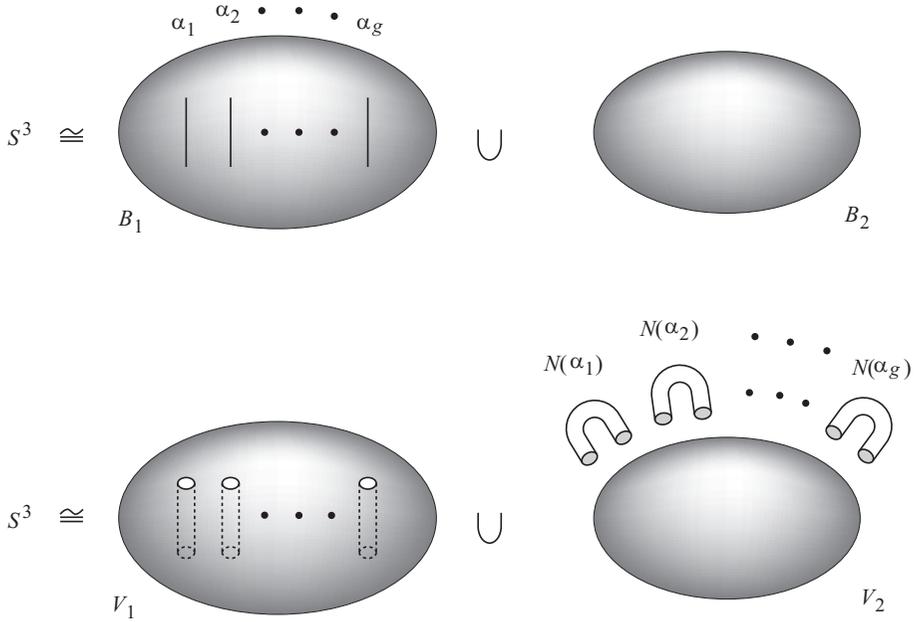


図 6.1

### 6.2 ヒーガード分解の存在

次の定理は、3次元多様体をヒーガード分解をとおして研究する上で、最も基本的なものである。

**定理 6.2** 任意の向き付け可能閉3次元多様体は、ヒーガード分解をもつ。

**証明**  $M$  を向き付け可能閉3次元多様体とする。 $K$  を  $M$  のある3角形分割とし、 $L$  を  $K$  の1次元単体および0次元単体全体からなる  $K$  の部分複体とする。 $K'$  および  $L'$  を、それぞれ  $K$  および  $L$  の1回重心細分とする。また、 $\tilde{L}'$  を  $K'$  の1次元単体および0次元単体のうちで、 $L'$  と交わらないもの全体からなる  $K'$  の部分複体とする。すなわち  $\tilde{L}'$  は、 $K$  の3次元単体の重心と、その2次元面の重心を両端点とするような  $K'$  の1次元単体全体、およびそれらに含まれる0次元単体全体からなる複体である。

さらに、 $K', L', \tilde{L}'$  の1回重心細分を、それぞれ  $K'', L'', \tilde{L}''$  とし、

$$V_1 = |\text{St}(L''; K'')|, \quad V_2 = |\text{St}(\tilde{L}''; K'')|$$

とおく (図 6.2)。

このとき次の補題で示すように、 $V_1, V_2$  はともにハンドル体である。しかもその作り方から  $M = V_1 \cup V_2$  であり、 $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$  である。したがって  $M$  はヒーガード分解  $(V_1, V_2)$  をもつ。 □

**補題 6.3**  $V_1, V_2$  はともにハンドル体である。

**証明の概略**  $L'$  の頂点のうち、 $L$  の頂点であるものを  $v_1, v_2, \dots, v_n$  とし、 $L$  の頂点で

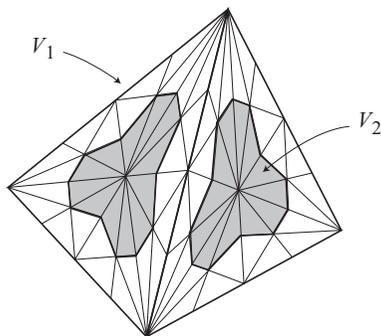


図 6.2

ないものを  $w_1, w_2, \dots, w_m$  とおく。  $v_1, v_2, \dots, v_n$  は  $K$  の頂点全体でもある。

$$B_i = |\text{St}(v_i; K'')| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$C_j = |\text{St}(w_j; K'')| \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

とおくと、  $B_i, C_j$  はすべて 3次元球体である。また、  $B_i \cap C_j$  は  $v_i$  と  $w_j$  が  $L'$  の 1次元単体の両端点になっているときは一つの 2次元円板であり、そうでないときは  $\emptyset$  である。ここで、  $L$  の連結な部分複体で、  $L$  の頂点をすべて含み、なおかつ円周に同相な部分複体を持たないものを  $T$  とし、  $T$  の 1回重心細分を  $T'$  とする。このような部分複体  $T$  を  $L$  の極大木という。  $T'$  は  $L'$  の部分複体である。

$w_1, w_2, \dots, w_m$  のうち、  $T'$  に含まれるものを  $x_1, x_2, \dots, x_s$  とし、  $T'$  に含まれないものを  $y_1, y_2, \dots, y_t$  とする。  $T'$  は  $L$  の頂点をすべて含むので、  $T'$  の頂点は  $v_1, v_2, \dots, v_n, x_1, x_2, \dots, x_s$  である。さらに、必要ならば番号を付け変えることにより、

$$x_1 = w_1, x_2 = w_2, \dots, x_s = w_s \quad y_1 = w_{s+1}, y_2 = w_{s+2}, \dots, y_t = w_m$$

としてよい。このとき、  $B = (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) \cup (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_s)$  とおくと、定理 2.13 と  $T'$  の作り方から  $B$  は 3次元球体である。さらに  $B \cap C_j$  ( $j = s+1, s+2, \dots, m$ ) は  $\partial B$  上の二つの 2次元円板である。ゆえに  $V_1$  は、 3次元球体  $B$  に  $m-s$  個のハンドルをくっつけたハンドル体である。

次に、  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  を  $K$  の 3次元単体全体とし、  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_k$  をそれらの重心とする。また、  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell$  を  $K$  の 2次元単体全体とし、  $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_\ell$  をそれらの重心とする。このとき、  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_k$  および  $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_\ell$  はちょうど  $\tilde{L}'$  の頂点全体である。ゆえに、これらの頂点に対して、  $V_1$  がハンドル体であることを示したのと同様の議論を適用し、  $V_2$  がハンドル体であることが示される。  $\square$

定理 6.2 より、すべての向き付け可能閉 3次元多様体は、ヒーガード分解をもつことがわかるが、さらに次が成り立つ。

**命題 6.4** 向き付け可能閉 3次元多様体  $M$  が種数  $g$  のヒーガード分解をもつならば、  $M$  は種数  $g+1$  のヒーガード分解をもつ。

**証明**  $(V_1, V_2)$  を  $M$  の種数  $g$  のヒーガード分解とする。図 6.3 のように、 $V_1$  に適切に埋め込まれた弧  $\alpha$  を考える。より正確には、 $\partial V_1$  上の弧  $\beta$  と  $V_1$  内の 2 次元円板  $D$  で、 $\partial D = \alpha \cup \beta$  となるものがあるような弧  $\alpha$  を考える。 $N(\alpha)$  を  $\alpha$  の  $V_1$  における正則近傍とし、 $W_1 = \text{cl}(V_1 - N(\alpha))$ ,  $W_2 = V_2 \cup N(\alpha)$  とおく。このとき  $M = W_1 \cup W_2$ ,  $W_1 \cap W_2 = \partial W_1 = \partial W_2$  であり、 $W_1, W_2$  はともに種数  $g+1$  のハンドル体である (問題 6.2)。ゆえに  $M$  は種数  $g+1$  のヒーガード分解をもつ。  $\square$

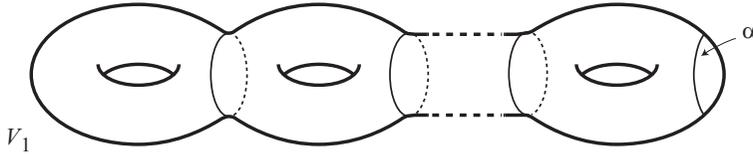


図 6.3

**問題 6.2** 命題 6.4 の証明において、 $W_1$  と  $W_2$  がともに種数  $g+1$  のハンドル体であることを示せ。

さて上記の命題より、 $M$  がある種数のヒーガード分解をもつならば、 $M$  はそれよりいくらかでも大きい種数のヒーガード分解をもつことがわかる。しかし、いくらかでも小さい種数のヒーガード分解をもつというわけにはいかない。なぜならもしそうだとしたら、種数 0 のヒーガード分解をもつことになり、すべての 3 次元多様体が、3 次元球面と同相になってしまうからである。そこで、

$$g(M) = \min\{g \mid M \text{ は種数 } g \text{ のヒーガード分解をもつ}\}$$

と定める。すなわち、 $g(M)$  は  $M$  がもつヒーガード分解の種数のうちの最小数である。この  $g(M)$  を  $M$  のヒーガード種数という。

## 第7章

# ヒーガード図式と基本群の表示

6章で、すべての向き付き可能閉3次元多様体は、ヒーガード分解をもつということを学んだ。本章では、そのヒーガード分解から得られる、ヒーガード図式というものを学ぶ。これによって、3次元多様体を視覚的にとらえることができる。またその図式から、3次元多様体の基本群の表示を得ることができる。

### 7.1 ヒーガード図式

$M$  を向き付け可能閉3次元多様体とし、 $(V_1, V_2; F)$  を種数  $g$  の  $M$  のヒーガード分解とする。また、 $f: \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$  を貼り合わせの同相写像とする。 $V_2$  はハンドル体であるから、5.2節で紹介した、完備メリディアン円板系をもつ。それを  $D_1, D_2, \dots, D_g$  とし、 $N(D_1), N(D_2), \dots, N(D_g)$  をそれらの  $V_2$  における正則近傍とする。 $N(D_i)$  は  $D_i \times [-1, 1]$  に同相なので、 $D_i \times \{0\}$  を  $D_i$  とみなす ( $i = 1, 2, \dots, g$ )。また、 $\partial D_i = \beta_i$  とし  $f(\beta_i) = \alpha_i$  とおく ( $i = 1, 2, \dots, g$ )。このとき、 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g\}$  は  $\partial V_2$  上の  $g$  本の互いに交わらない単純閉曲線であり、 $\{D_1, D_2, \dots, D_g\}$  が  $V_2$  の完備メリディアン円板系であることから、 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g\}$  で  $\partial V_2$  を切り開くと、2次元球面から  $2g$  個の2次元円板の内部を取り除いた曲面になる。ゆえに  $f$  が同相写像であることより、

(H)  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g\}$  は、 $\partial V_1$  上の互いに交わらない  $g$  本の単純閉曲線であり、 $\partial V_1$  をそれらで切り開くと、2次元球面から  $2g$  個の2次元円板の内部を取り除いた曲面になる。

という性質をもっている。この性質を (H) と名付ける。

さて、 $M$  は  $V_1$  と  $V_2$  をその表面で  $f$  によって貼り合わせて得られるわけであるが、そのことを以下のように考えよう。まず

$$B = \text{cl}(V_2 - (N(D_1) \cup N(D_2) \cup \dots \cup N(D_g)))$$

とおく。 $B$  は  $V_2$  を  $\{D_1, D_2, \dots, D_g\}$  で切り開いた多様体なので、3次元球体である。また、 $N(D_1) \cup N(D_2) \cup \dots \cup N(D_g)$  は、 $f$  を

$$\partial D_1 \times [-1, 1] \cup \partial D_2 \times [-1, 1] \cup \dots \cup \partial D_g \times [-1, 1]$$

に制限した写像によって  $V_1$  に貼り合わされる。それを  $W$  とおく。すなわち

$$W = V_1 \cup_f (N(D_1) \cup N(D_2) \cup \dots \cup N(D_g)) \text{ である (図 7.1)}.$$

今  $M = W \cup B$ ,  $W \cap B = \partial W = \partial B$  となっている。 $W$  は境界が2次元球面であるよ

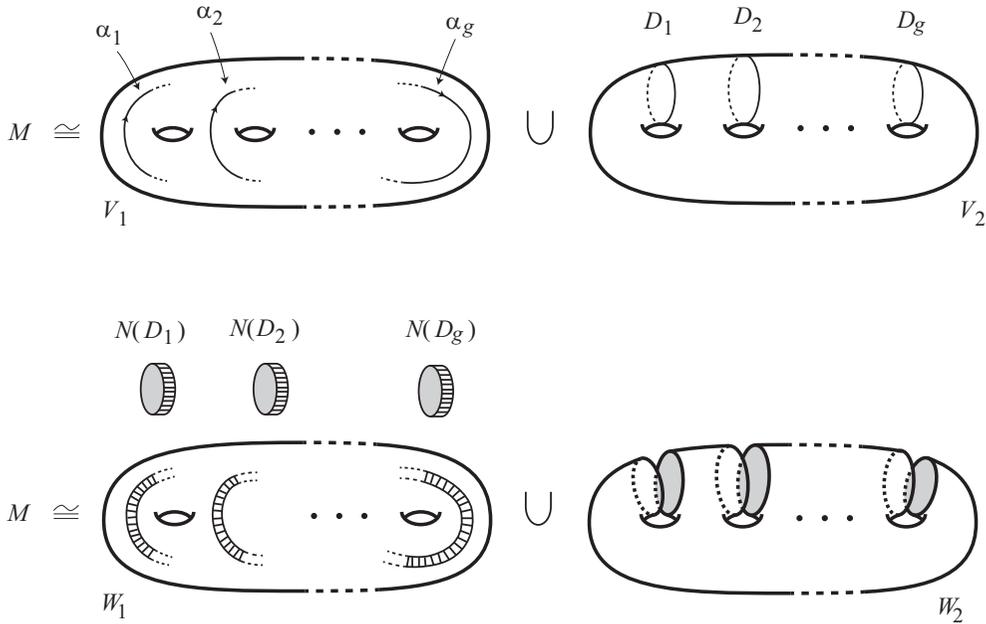


図 7.1

うな 3次元多様体であり、それに 3次元球体  $B$  を貼り合わせて  $M$  が得られる。ここで定理 2.10 より  $B$  を  $W$  にどのように貼り合わせても、できあがる多様体は  $M$  に同相である。ゆえに  $W$  の位相形が決まれば  $M$  の位相形が決まる。ところで  $W$  は  $V_1$  に  $N(D_i)$  を、 $\partial D_i \times [-1, 1]$  に沿って貼り合わせて得られたものであるが、 $\partial D_i \times [-1, 1]$  は  $\alpha_i$  によって決まる。すなわち、 $V_1$  と性質 (H) をみたます  $\partial V_1$  上の  $g$  本の単純閉曲線  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g\}$  の組  $(V_1, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g\})$  によって  $W$  は決まる。よってこの組を、 $M$  のヒーガード図式とよぶ。

また以上のことから、種数  $g$  のハンドル体と、その表面上の  $g$  本の単純閉曲線で、性質 (H) をみたますものが与えられると、それらから上記の議論を逆にたどることにより、ある向き付け可能閉 3次元多様体得られることがわかる。したがってヒーガード図式は、3次元多様体そのものということができる。

図 7.2 は、いずれも  $S^3$  の種数 1 のヒーガード図式であり、図 7.3 はどちらも  $S^3$  の種数 2 のヒーガード図式である。図 7.4 も  $S^3$  の種数 2 のヒーガード図式であるが、これが  $S^3$  であることを確認するのは、少し難しいかもしれない ([11] 参照)。なお、このような問題に関しては、任意に与えられた種数 2 のヒーガード図式が、 $S^3$  であるかどうかを判定する完全なアルゴリズムが、本間、落合、高橋 ([H-O-T]) によって与えられている。

## 7.2 群の表示とザイフェルト・ファンカンペンの定理

本節では、次節で 3次元多様体の基本群の表示を学ぶための準備として、一般的な群の表

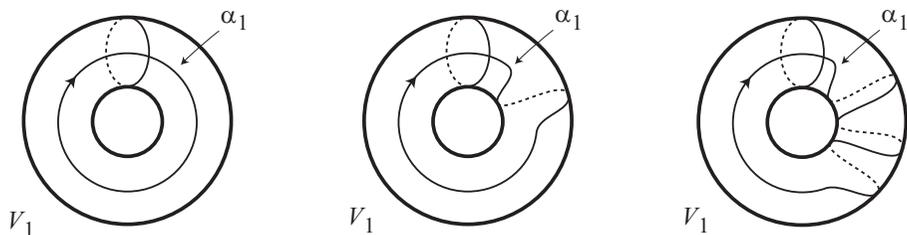


図 7.2

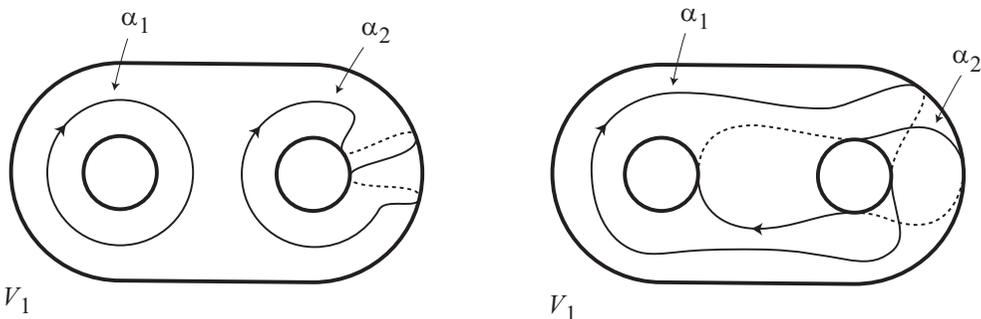


図 7.3

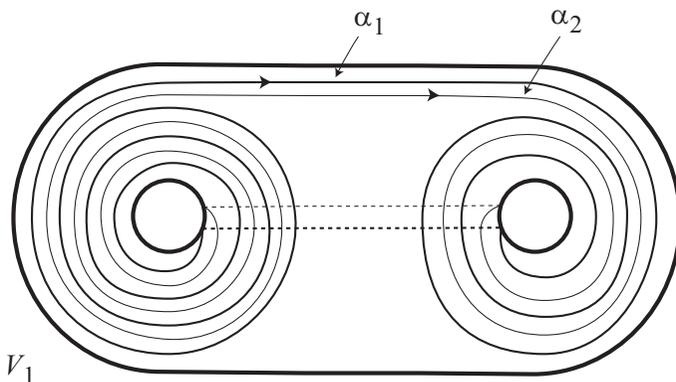


図 7.4

示方法について学ぶ。

$x_1, x_2, \dots, x_n$  を  $n$  個の文字とする。これらおよび  $x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}$  という  $n$  個の文字を有限回並べたものを語という。たとえば,

$$x_3 x_1 x_3^{-1} x_2 x_2 x_2 x_1^{-1} x_1 x_2^{-1} x_3$$

などである。ここで  $x_2 x_2 x_2$  は  $x_2^3$  に、 $x_1^{-1} x_1$  は 1 というように、語を簡単にしたものを既約語という。ただし順序は変えてはいけないので、 $x_1 x_2$  と  $x_2 x_1$  は異なる語である。また、1 はなにも文字を含まないという意味で空語といい、語のなかでは省略する。このとき先ほどの語は,

$$x_3 x_1 x_3^{-1} x_2^2 x_3$$

となる。このような、 $2n$  個の文字から作られる既約語全体を  $F_n$  と書く。

$F_n$  の二つの語  $w_1, w_2$  に対して、それらを並べて得られる既約語を  $w_1 w_2$  と書く。 $w_1 w_2$  も  $F_n$  の元である。これを  $F_n$  における積という。これは明らかに結合法則  $(w_1 w_2) w_3 = w_1 (w_2 w_3)$  をみたしている。また、 $F_n$  の元  $w = x_{k_1}^{\epsilon_1} x_{k_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{k_r}^{\epsilon_r}$  に対して、 $w^{-1} = x_{k_r}^{-\epsilon_r} x_{k_{(r-1)}}^{-\epsilon_{(r-1)}} \cdots x_{k_1}^{-\epsilon_1}$  とおくと、 $w w^{-1} = w^{-1} w = 1$  となる。ゆえに  $F_n$  は 1 を単位元とする群になる。これを階数  $n$  の自由群という。このとき、 $F_1$  は整数全体  $\mathbf{Z}$  が作る無限巡回群に同形である。また、 $F_1$  は可換群であるが、 $n > 1$  のとき  $F_n$  は可換群ではない。

次に  $G$  を有限個の元  $x_1, x_2, \dots, x_n$  を生成元とするある群とする。 $\varphi : F_n \rightarrow G$  を  $\varphi(x_i) = x_i$  によって定めれば、 $F_n$  の作り方より、 $\varphi$  は  $F_n$  から  $G$  への全射準同形へと拡張する。よって  $\text{Ker} \varphi = N$  とおくと、 $N$  は  $F_n$  の正規部分群であり、準同形定理より  $F_n/N \cong G$  が成り立つ。すなわち、 $G$  は  $F_n$  において  $N$  のすべての元を 1 とおいた群に同形というわけである。ここで、 $N$  が有限個の  $F_n$  の元  $r_1, r_2, \dots, r_m$  から生成されているとしよう。すなわち、 $N$  は  $r_1, r_2, \dots, r_m$  を含むような  $F_n$  の正規部分群のうちの最小のものとする。このとき正規部分群の定義より、 $N$  は  $\prod_{j=1}^{\ell} w_j r_{i_j} w_j^{-1}$  (ただし  $w_j \in F_n$ ) という形をした  $F_n$  の元全体となる。ゆえに、 $F_n$  において  $N$  のすべての元を 1 とするかわりに、 $r_1, r_2, \dots, r_m$  を 1 とすればよいことがわかる。このとき、

$$G \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$$

と書き、これを群  $G$  の表示という。また  $x_1, x_2, \dots, x_n$  を  $G$  の生成元、 $r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, r_m = 1$  を  $G$  の関係式という。一般に、群の生成元の数と関係式の数は有限個とは限らないが、このようにそれらがともに有限個であるとき、その群を有限表示群という。

たとえば、位数  $p$  の巡回群  $\mathbf{Z}_p$  は  $\mathbf{Z}_p \cong \langle x \mid x^p = 1 \rangle$  であり、無限巡回群  $\mathbf{Z}$  は生成元が一つであり関係式がないので、 $\mathbf{Z} \cong \langle x \mid - \rangle$  となる。また、二つの無限巡回群の直積群  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  は  $\langle x, y \mid xy = yx \rangle$  となる。

次に、

$$G_1 \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, r_k = 1 \rangle,$$

$$G_2 \cong \langle y_1, y_2, \dots, y_m \mid s_1 = 1, s_2 = 1, \dots, s_\ell = 1 \rangle$$

を二つの有限表示群とする。このとき、表示

$$\left\langle \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_m \end{array} \middle| \begin{array}{l} r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, r_k = 1 \\ s_1 = 1, s_2 = 1, \dots, s_\ell = 1 \end{array} \right\rangle$$

で定義される群を  $G_1$  と  $G_2$  の自由積といい、 $G_1 * G_2$  と書く。たとえば、 $\mathbf{Z}_2 \cong \langle x \mid x^2 = 1 \rangle$ 、 $\mathbf{Z}_3 \cong \langle y \mid y^3 = 1 \rangle$  のとき、 $\mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_3 \cong \langle x, y \mid x^2 = 1, y^3 = 1 \rangle$  となる。二つの群  $G_1$  と  $G_2$  の直積群には、次の例で示すように  $G_1$  の元と  $G_2$  の元が可換という関係式が入るが、自由積には入らないことに注意されたい。

例 1  $G_1, G_2$  を上記の二つの群とする。このとき、 $G_1$  と  $G_2$  の直積群  $G_1 \times G_2$  は次の

表示をもつ。

$$\left\langle \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_m \end{array} \left| \begin{array}{l} r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, r_k = 1 \\ s_1 = 1, s_2 = 1, \dots, s_\ell = 1 \\ x_i y_j = y_j x_i \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m) \end{array} \right. \right\rangle$$

さて、位相空間  $X$  と  $X$  内のある点  $p$  に対して、 $p$  を基点とする  $X$  内の閉じた道全体を考え、それらに  $x$  を止めてホモトピックという同値関係を入れる。そして二つの道をつなげるといふ操作を演算と定めると、これらの閉じた道の同値類全体は群となる。その群を  $p$  を基点とする  $X$  の基本群といい  $\pi_1(X, p)$  と書く。基本群について詳しくは、[4], [7] を参照されたい。

今  $K$  を連結な単体的複体とし、 $K_1, K_2, K_0$  を  $K$  の連結な部分複体で、 $K = K_1 \cup K_2$  であり、 $K_1 \cap K_2 = K_0$  であるものとする。 $K_0$  のある頂点  $a$  を基点としたこれらの基本群

$$\pi_1(K, a), \pi_1(K_1, a), \pi_1(K_2, a), \pi_1(K_0, a)$$

を考え、

$$i_{1*} : \pi_1(K_0, a) \rightarrow \pi_1(K_1, a), \quad i_{2*} : \pi_1(K_0, a) \rightarrow \pi_1(K_2, a)$$

を包含写像  $i_1 : K_0 \rightarrow K_1$ ,  $i_2 : K_0 \rightarrow K_2$  から導かれる準同形とする。さらに、

$$\pi_1(K_1, a) \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, r_k = 1 \rangle,$$

$$\pi_1(K_2, a) \cong \langle y_1, y_2, \dots, y_m \mid s_1 = 1, s_2 = 1, \dots, s_\ell = 1 \rangle,$$

$$\pi_1(K_0, a) \cong \langle z_1, z_2, \dots, z_p \mid t_1 = 1, t_2 = 1, \dots, t_q = 1 \rangle$$

とする。このとき次が成り立つ（証明は [4], [7] 等を参照されたい）。

**定理 7.1** (ザイフェルト・ファンカンペンの定理)

$$\pi_1(K, a) \cong \left\langle \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_m \end{array} \left| \begin{array}{l} r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, r_k = 1 \\ s_1 = 1, s_2 = 1, \dots, s_\ell = 1 \\ i_{1*}(z_j) = i_{2*}(z_j) \quad (j = 1, 2, \dots, p) \end{array} \right. \right\rangle$$

すなわち  $\pi_1(K, a)$  は、 $\pi_1(K_1, a) * \pi_1(K_2, a)$  において  $i_{1*}(z_j) = i_{2*}(z_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) という関係を入れた群である。

**系 7.2** 上記の記号のもとに次の (1), (2) が成り立つ。

(1)  $\pi_1(K_0, a)$  が自明な群ならば、 $\pi_1(K, a) \cong \pi_1(K_1, a) * \pi_1(K_2, a)$ 。

(2)  $\pi_1(K_2, a)$  が自明な群ならば、

$$\pi_1(K, a) \cong \left\langle x_1, x_2, \dots, x_n \left| \begin{array}{l} r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, r_k = 1 \\ i_{1*}(z_j) = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, p) \end{array} \right. \right\rangle$$

### 7.3 基本群の表示

本節において、与えられたヒーガード図式から、できあがる 3 次元多様体の基本群の表示

を得る方法を学ぶ。ただし、本節においては、位相空間  $X$  のある点を基点とする基本群を  $\pi_1(X)$  と書く。まずはじめに、ハンドル体の基本群の表示を求めよう。

**命題 7.3** トーラス体  $H_1$  の基本群は、その中心となる単純閉曲線  $x_1$  を生成元とする無限巡回群である (図 7.5)。

**証明**  $S^1$  を単位円周とし、 $D^2$  を 2 次元円板とすると、 $H_1 \cong S^1 \times D^2$  である。よって

$$\pi_1(H_1) \cong \pi_1(S^1 \times D^2) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(D^2) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$$

であり、その生成元は  $S^1 \times \{a\}$  を代表元とするホモトピー類である。ここで、 $a$  は  $D^2$  内のある点である。したがってトーラス体の中心線となる (図 7.5 は  $a$  を  $\partial D^2$  上の点として描いている)。 □

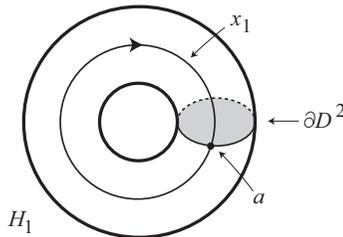


図 7.5

**問題 7.1** 種数  $g$  のハンドル体  $H_g$  は 3 次元球体  $B$  に  $g$  個のトーラス体  $T_1, T_2, \dots, T_g$  を境界上の 2 次元円板でくっつけて得られる多様体であることを示せ (図 7.6)。

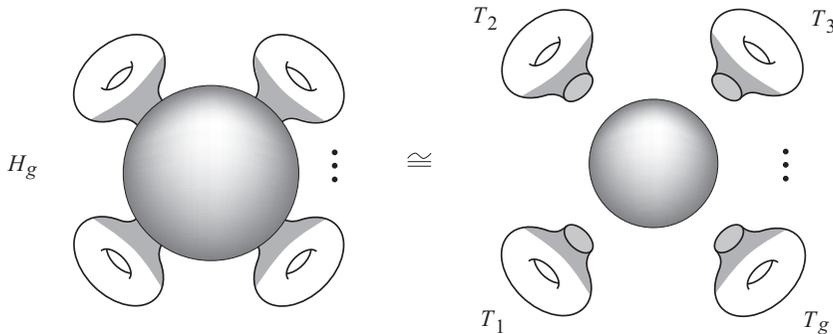


図 7.6

問題 7.1 と系 7.2 より、次の命題を得る。

**命題 7.4**  $H_g$  を種数  $g$  のハンドル体とし、 $\{D_1, D_2, \dots, D_g\}$  を  $H_g$  の完備メリディアン円板系とする。図 7.7 のように、 $\partial H_g$  上の点  $a$  を基点とし、各メリディアン円板  $D_i$  とちょうど 1 点で交わるような向きの付いた単純閉曲線を  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ ) とする。このとき、 $\pi_1(H_g) \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_g \mid - \rangle$  である。これは  $\{x_1, x_2, \dots, x_g\}$  を生成元とするような、階数  $g$  の自由群である。

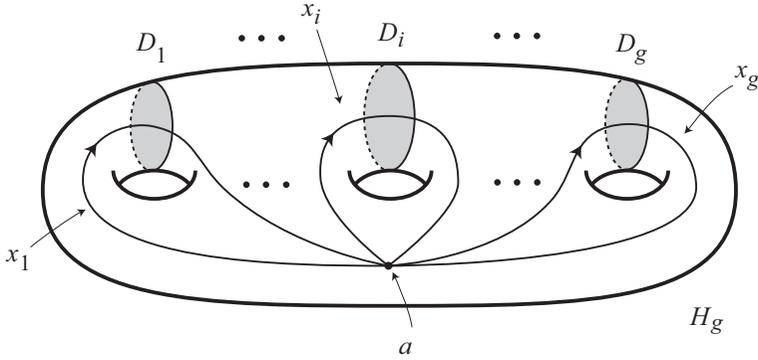


図 7.7

さて、 $M$  を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし、 $M = V_1 \cup V_2$  を  $M$  の種数  $g$  のヒーガード分解とする。また、 $f : \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$  をその貼り合わせの写像とする。 $\{D_1^1, D_2^1, \dots, D_g^1\}$ ,  $\{D_1^2, D_2^2, \dots, D_g^2\}$  をそれぞれ  $V_1, V_2$  の完備メリディアン円板系とし、 $N(D_1^2), N(D_2^2), \dots, N(D_g^2)$  を  $D_1^2, D_2^2, \dots, D_g^2$  の  $V_2$  における正則近傍とする。 $B = d(V_2 - (N(D_1^2) \cup N(D_2^2) \cup \dots \cup N(D_g^2)))$  とおくと、 $B$  は 3 次元球体であり、 $M = V_1 \cup (N(D_1^2) \cup N(D_2^2) \cup \dots \cup N(D_g^2)) \cup B$  となる。 $\beta_i = \partial D_i^2$ ,  $f(\beta_i) = \alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ ) とおいて、 $M$  のヒーガード図式  $(V_1, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g\})$  が得られる。

以下でこのヒーガード図式から、 $\pi_1(M)$  の表示を求める。そのためにまず、 $\pi_1(V_1 \cup N(D_1^2))$  の表示を求めよう。 $V_1, N(D_1^2)$  はともに連結な複体であり、 $V_1 \cap N(D_1^2) = \partial D_1^2 \times I$  も連結な複体なので、 $K = V_1 \cup N(D_1^2)$ ,  $K_1 = V_1$ ,  $K_2 = N(D_1^2)$ ,  $K_0 = \partial D_1^2 \times I$  とおくと、定理 7.1 を用いることができる。しかも  $N(D_1^2)$  は 3 次元球体に同相なので、 $\pi_1(N(D_1^2))$  は自明な群であるから、系 7.2(2) を用いることができる。命題 7.4 より  $\pi_1(V_1) \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_g \mid - \rangle$  であり、また、 $\pi_1(\partial D^2 \times I) \cong \pi_1(\partial D^2) \times \pi_1(I) \cong \pi_1(S^1) \cong \langle z_1 \mid - \rangle$  である。ゆえに  $i_{1*}(z_1)$  がわかればよいことになる。

ここで、 $z_1$  は  $\partial D_1^2 = \beta_1$  に対応するので、 $i_{1*}(z_1)$  は  $f(\beta_1) = \alpha_1$  に対応する。また、 $\pi_1(V_1)$  の生成元  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ ) は  $V_1$  のメリディアン円板  $D_i^2$  と 1 回交わる閉曲線に対応するので、 $i_{1*}(z_1)$  は  $\alpha_1$  と  $\{D_1, D_2, \dots, D_g\}$  の交わりに対応する。ゆえに、 $\alpha_1$  に方向を一つ指定し、 $\alpha_1$  が  $D_i^2$  と交わるごとに、 $x_i$  と同じ向きで交われれば  $x_i$ 、反対向きで交われれば  $x_i^{-1}$  という文字を並べてできあがった語を  $w(\alpha_1)$  とおく。このとき、系 7.2(2) より

$$\pi_1(V_1 \cup N(D_1^2)) \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_g \mid w(\alpha_1) = 1 \rangle$$

を得る。

同様にして、 $\alpha_2, \dots, \alpha_g$  から得られる語を  $w(\alpha_2), \dots, w(\alpha_g)$  とおき、上記の議論を繰り返して

$$\begin{aligned} \pi_1(V_1 \cup N(D_1^2) \cup N(D_2^2) \cup \dots \cup N(D_g^2)) \\ \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_g \mid w(\alpha_1) = 1, w(\alpha_2) = 1, \dots, w(\alpha_g) = 1 \rangle \end{aligned}$$

を得る。最後に  $\pi_1(B), \pi_1(\partial B)$  がともに自明な群であることに注意すると、系 7.2 より次を

得る。

**定理 7.5**  $M$  を向き付け可能閉 3 次元多様体とし、 $(V_1, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g\})$  をそのヒーガード図式とする。また、 $\alpha_i$  と  $V_1$  の完備メリディアン円板系との交わりにしたがって得られる語を  $w(\alpha_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ ) とする。このとき、 $\pi_1(M)$  は次の表示をもつ。

$$\pi_1(M) \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_g \mid w(\alpha_1) = 1, w(\alpha_2) = 1, \dots, w(\alpha_g) = 1 \rangle$$

**例 2** 図 7.3 に描かれた  $S^3$  の二つのヒーガード図式から得られる基本群の表示は、それぞれ、

$$\langle x_1, x_2 \mid x_1 = 1, x_2 = 1 \rangle, \quad \langle x_1, x_2 \mid x_1 x_2 = 1, x_2 = 1 \rangle$$

であり、これらはともに自明な群に同形である。

**問題 7.2** 図 7.4 に描かれた  $S^3$  のヒーガード図式から得られる基本群の表示を求め、それが自明な群に同形であることを示せ。

$M$  を向き付け可能閉 3 次元多様体とし、 $M$  の基本群  $\pi_1(M)$  の生成元の最小数を  $r(M)$  と書く。このとき定理 7.5 から、次の不等式が成り立つ。

$$\text{系 7.6} \quad r(M) \leq g(M)$$

系 7.6 は  $g(M)$  という幾何的な量が、 $r(M)$  という代数的な量で評価できることを示している。

「宇宙の設計図」 本章において、ヒーガード図式という 3 次元多様体の表現方法を紹介した。3 次元多様体を宇宙にたとえるならば、これは宇宙の設計図というべきものである。そして、本章で紹介した 3 次元球面のいろいろなヒーガード図式は、一つの宇宙を構成するのに、さまざまな設計図があることを示している。また、与えられた二つの設計図からできあがる宇宙が、同じ（同相）かどうかを判定したり、できあがる宇宙の性質を調べたりすることは、3 次元多様体論における重要な問題であり、基本群はそのための有効な道具となる。読者も自分流の設計図を描き、新しい宇宙を創造してみたいかがであらうか。

## 第8章

# レンズ空間

問題 4.3 によって、種数 0 のヒーガード分解をもつ 3 次元多様体は、3 次元球面だけであることがわかる。本章ではさらに、種数 1 のヒーガード分解をもつ 3 次元多様体について学ぶ。そのような多様体は、二つのトーラス体をその表面で貼り合わせて得られるので、まず最初に、そのような貼り合わせかたを記述する方法について学ぶ。

### 8.1 トーラス上の単純閉曲線

$F$  を 2 次元多様体とし、 $\alpha$  を  $F$  上の単純閉曲線とする。 $F$  内の 2 次元円板  $B$  で  $\partial B = \alpha$  となるものがあるとき、 $\alpha$  を非本質的といい、そのような 2 次元円板がないとき、 $\alpha$  を本質的という (図 8.1)。

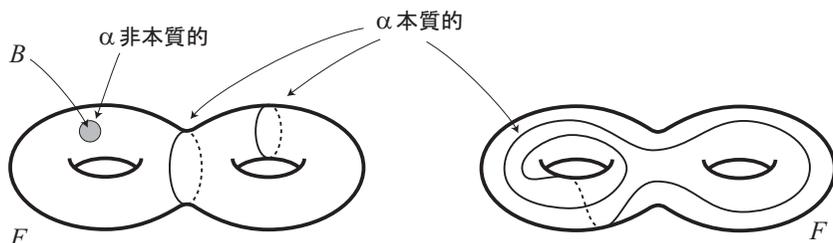


図 8.1

**補題 8.1**  $T$  をトーラスとし、 $\alpha$  を  $T$  上の本質的単純閉曲線とすると、 $\alpha$  は  $T$  をアニュラスに切り開く。

**証明**  $N(\alpha)$  を  $T$  における  $\alpha$  の正則近傍とし  $T' = \text{cl}(T - N(\alpha))$  とおく。 $N(\alpha)$  はアニュラスなので、 $T'$  は境界が二つの円周であるような向き付け可能コンパクト 2 次元多様体である。よって、 $\partial T' = C_1 \cup C_2$  とおく。今  $D_1, D_2$  を二つの 2 次元円板とし、 $C_i$  と  $\partial D_i$  ( $i = 1, 2$ ) を貼り合わせて得られる閉曲面を  $F = T' \cup D_1 \cup D_2$  とおく。 $\chi(T) = 0$  であることより、 $\chi(F) = 2$  である (問題 8.1)。ここで  $\chi(\cdot)$  はオイラー標数である。このとき  $\alpha$  に関して、次の二通りの場合が考えられる。

$\alpha$  が  $T$  を二つの部分に分離する場合。 $F$  は二つの連結成分をもつので、それらを  $F_1, F_2$  とおく。 $\chi(F) = \chi(F_1 \cup F_2) = \chi(F_1) + \chi(F_2) = 2$  であり、 $F_1, F_2$  はともに向き付け可能閉曲面なので、定理 3.2 より  $\chi(F_1) = 0$ ,  $\chi(F_2) = 2$  としてよい。このとき  $F_1$  はトーラスであり  $F_2$  は 2 次元球面である。よって  $\text{cl}(F_2 - D_2)$  は 2 次元円板となり、

$T' = \text{cl}(F_1 - D_1) \cup \text{cl}(F_2 - D_2)$  であることから、 $\alpha$  は  $T$  内の 2 次元円板の境界となる。これは  $\alpha$  が  $T$  上で本質的であることに矛盾する。すなわち  $\alpha$  は  $T$  を二つの部分に分離しない。

$\alpha$  が  $T$  を分離しない場合、 $F$  は連結であり、 $\chi(F) = 2$  より、定理 3.2 から  $F$  は 2 次元球面である。ゆえに  $T'$  は 2 次元球面から二つの 2 次元円板の内部を取り除いたものとなり、それはアニュラスである。よって  $\alpha$  は  $T$  をアニュラスに切り開く。  $\square$

**問題 8.1** 補題 8.1 の証明中の  $\chi(F) = 2$  を示せ。

$S^1$  を複素平面内の単位円周  $S^1 = \{ e^{i\theta} \mid \theta \text{ は実数, } i \text{ は虚数単位} \}$  と考え、トーラス  $T$  を座標を用いて、 $T = S^1 \times S^1 = \{ (e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \}$  と表す。 $I = [0, 1]$  とし、

$\ell : I \rightarrow T$  を  $\ell(t) = (e^{2\pi ti}, 1)$ ,  $m : I \rightarrow T$  を  $m(t) = (1, e^{2\pi ti})$  とする。 $\ell, m$  はともに  $(1, 1)$  を基点とする  $T$  上の単純閉曲線となる (図 8.2)。

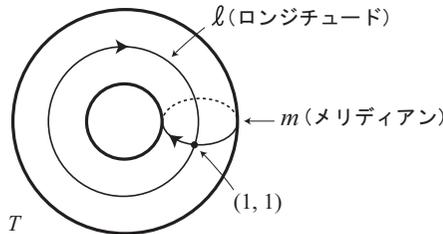


図 8.2

ここで、 $(1, 1)$  を基点とする  $T$  の基本群を  $\pi_1(T)$  と書き、 $\ell, m$  を代表元とする  $\pi_1(T)$  の元をやはり  $\ell, m$  と書くと、 $\pi_1(T) \cong \langle \ell \mid - \rangle \oplus \langle m \mid - \rangle \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  となる。ゆえに  $\pi_1(T)$  の任意の元は、ある二つの整数  $p, q$  を用いて、 $p\ell + qm$  と表すことができる。

**命題 8.2**  $\pi_1(T)$  の元  $p\ell + qm$  が  $T$  上の単純閉曲線で実現される為の必要十分条件は、 $p = q = 0$  であるかまたは  $p$  と  $q$  が互いに素となることである。

**証明** まず十分性を示す。 $p = q = 0$  のとき。これは  $\pi_1(T)$  の単位元なので、 $T$  内の 2 次元円板の境界となるような単純閉曲線で実現される。

$p$  と  $q$  が互いに素のとき。 $\alpha : I \rightarrow T$  を  $\alpha(t) = (e^{2\pi pti}, e^{2\pi qti})$  とする。これは  $(1, 1)$  を基点とする閉曲線であるが、さらに  $p$  と  $q$  が互いに素であることより、単純閉曲線となる (問題 8.2)。この  $\alpha$  は  $T = S^1 \times S^1$  において、第 1 座標の  $S^1$  方向に  $p$  回、第 2 座標の  $S^1$  方向に  $q$  回まわる閉曲線にホモトピックである。したがって、 $\alpha$  を代表元とする  $\pi_1(T)$  の元をやはり  $\alpha$  と書くと、 $\alpha = p\ell + qm$  である。この  $\alpha$  を図示すると、図 8.3(1) のような単純閉曲線となる。図 8.3 は  $p = 3, q = 4$  の場合である。また、 $T$  を  $\ell$  と  $m$  で切り開くと正正方形が得られるが、その正方形において  $\alpha$  は図 8.3(2) のような傾き  $\frac{q}{p}$  のいくつかの線分となる。

次に必要性を示す。 $\alpha$  を  $T$  上の  $(1, 1)$  を基点とする単純閉曲線とし、 $\alpha = p\ell + qm$  とする。補題 8.1 より  $\alpha$  は  $T$  内の 2 次元円板の境界になるか、または  $T$  をアニュラスに切り

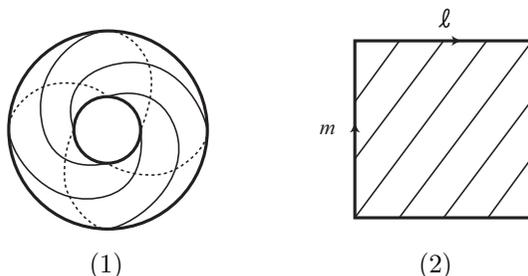


図 8.3

開く。

$\alpha$  が 2 次元円板の境界になるときは,  $\alpha$  は  $\pi_1(T)$  の単位元なので,  $p = q = 0$  である。 $\alpha$  が  $T$  をアニュラスに切り開くとする。 $N(\alpha)$  を  $\alpha$  の正則近傍とし  $A = \text{cl}(T - N(\alpha))$  とおくと,  $A$  はアニュラスである。はじめに定義した単純閉曲線  $\ell$  に対して,  $N(\ell)$  を  $\ell$  の正則近傍とし  $T' = \text{cl}(T - N(\ell))$  とおくと,  $\ell$  の定義から  $T'$  もアニュラスである。ゆえに  $T$  上の自己同相写像で  $\alpha$  を  $\ell$  に移すものがある (問題 8.3)。それを  $f: T \rightarrow T$  とする。

$f$  から導かれる  $\pi_1(T)$  上の準同形写像を  $f_*: \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(T)$  とすると,  $f_*: \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  は自己同形写像であり,  $f(\alpha) = \ell$  なので,  $f_*(p, q) = (1, 0)$  である。よって, ある整数上の 2 次行列によって

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と表すことができる。ゆえに  $pr + qs = 1$  より  $p$  と  $q$  は互いに素である。  $\square$

**問題 8.2** 命題 8.2 の十分性の証明において,  $\alpha$  が単純閉曲線となることを示せ。

**問題 8.3** 命題 8.2 の必要性の証明において,  $f(\alpha) = \ell$  となる  $T$  上の自己同相写像  $f: T \rightarrow T$  が存在することを示せ。

## 8.2 レンズ空間の定義

$V_1$  をトーラス体とする。 $V_1 = S^1 \times D^2$  であり,  $\partial V_1 = S^1 \times \partial D^2 = S^1 \times S^1$  である。 $\ell$  と  $m$  を 8.1 節で定義した  $\pi_1(\partial V_1)$  の生成元を表す単純閉曲線とする (図 8.2)。 $\ell$  をロンジチュード,  $m$  をメリディアンという。 $\pi_1(V_1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(D^2) \cong \pi_1(S^1)$  は  $\ell$  から生成される無限巡回群であり,  $m$  は  $\partial D^2 = m$  なので  $\pi_1(V_1)$  においては単位元である。

今  $p, q$  を互いに素な整数とし,  $\alpha: I \rightarrow \partial V_1$  を命題 8.2 の証明において定めた単純閉曲線とする。 $\alpha$  は  $\partial V_1$  をアニュラスに切り開くので,  $\alpha$  は 7.1 節の性質 (H) をみたす。ゆえに  $(V_1, \alpha)$  は種数 1 のヒーガード図式となる。このヒーガード図式から得られる 3 次元多様体を  $L(p, q)$  と書き,  $(p, q)$  型のレンズ空間という。このとき  $\pi_1(L(p, q))$  は位数  $p$  の巡回群  $\mathbf{Z}_p$  となる (問題 8.4)。ここで特に  $\mathbf{Z}_1$  は単位元のみからなる群,  $\mathbf{Z}_0$  は無限巡回群を表す。

**問題 8.4** 定理 7.5 を用いて,  $\pi_1(L(p, q))$  は位数  $p$  の巡回群  $\mathbf{Z}_p \cong \langle x \mid x^p = 1 \rangle$  に同形であることを示せ。

**問題 8.5** (1) 図 7.2 を参考にして, 任意の整数  $q$  に対して  $L(1, q) \cong S^3$  を示せ。

(2)  $S^2 \times S^1$  が種数 1 のヒーガード分解をもつことを示し,  $L(0, 1) \cong S^2 \times S^1$  を示せ。

**【注意】** 一般に  $S^3$  と  $S^2 \times S^1$  はレンズ空間とはよばないが, 本書では便宜上, これらもレンズ空間とよぶことにする。

以上で, 種数 1 のヒーガード分解をもつ向き付け可能閉 3 次元多様体は, あるレンズ空間に同相であるといいたいところであるが, 実はこれまでの議論ではまだ不十分なのである。というのは,  $\partial V_1$  上の本質的な単純閉曲線に対応して, 命題 8.2 より  $\pi_1(\partial V_1)$  の元  $pl + qm$  (ただし  $p, q$  は互いに素) が決まり, その一つの代表元  $\alpha$  を用いて,  $L(p, q)$  という多様体を構成した。そのため, 他の代表元を用いた場合, 異なる多様体ができるのではないかという疑問が生じるからである。その疑問を解決するために, まず一つ補題を準備しよう。

**補題 8.3 ([Ep2])**  $T$  をトーラスとし,  $\alpha$  と  $\alpha'$  を  $T$  上の二つの本質的な単純閉曲線とする。このとき,  $\alpha$  が  $\alpha'$  にホモトピックならば,  $\alpha$  は  $\alpha'$  にアンビエントイソトピックである。

この補題の証明は省略するが, これを用いると, 先ほどの疑問は以下のように解決される。

**補題 8.4**  $(V_1, \alpha), (V_1, \alpha')$  をともに種数 1 のヒーガード図式とし, それぞれのヒーガード図式から得られる 3 次元多様体を  $M, M'$  とする。 $\alpha$  と  $\alpha'$  が  $\partial V_1$  上でホモトピックならば,  $M \cong M'$  である。

**証明**  $\beta$  を  $V_2$  のメリディアンとし,  $f: \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$  を  $f(\beta) = \alpha$  であるような同相写像とする。 $M = V_1 \cup_f V_2$  である。 $\alpha$  は  $\alpha'$  にホモトピックなので, 補題 8.3 よりアンビエントイソトピー  $\{g_t\}: \partial V_1 \rightarrow \partial V_1, g_0 = \text{id}, g_1(\alpha) = \alpha'$  が存在する。また  $f' = g_1 \circ f: \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$  とおく。 $f'(\beta) = g_1 \circ f(\beta) = g_1(\alpha) = \alpha'$  より,  $M' = V_1 \cup_{f'} V_2$  である。

系 2.6 で存在が保証される  $\partial V_1$  のカラー近傍を  $\partial V_1 \times I$  とし,  $W_1 = \text{cl}(V_1 - (\partial V_1 \times I))$  とおく。ただし,  $\partial V_1 \times \{1\} = \partial V_1, \partial V_1 \times \{0\} = \partial W_1$  である。 $G: \partial V_1 \times I \rightarrow \partial V_1 \times I$  を  $G(x, t) = g_t(x)$  とおくと  $G$  は同相写像である。このとき,

$$h: M = W_1 \cup (\partial V_1 \times I) \cup_f V_2 \rightarrow M' = W_1 \cup (\partial V_1 \times I) \cup_{f'} V_2$$

を  $h|_{W_1} = \text{id}, h|_{\partial V_1 \times I} = G, h|_{V_2} = \text{id}$  と定めると,  $h: M \rightarrow M'$  は同相写像となる。□

**【注意】** 一般に任意の種数  $g$  に対して, ホモトピックな種数  $g$  のヒーガード図式から得られる 3 次元多様体は同相となる。これは上記の議論と同様の方法で示される ([Ep2])。

以上で次が得られた。

**定理 8.5** 種数 1 のヒーガード分解をもつ向き付け可能閉 3 次元多様体は, あるレンズ

空間  $L(p, q)$  に同相である。

### 8.3 レンズ空間の分類

定理 8.5 より、種数 1 のヒーガード分解をもつ 3 次元多様体を表現する方法が得られた。次にその分類を考えよう。まず図 8.4 に示した、折り返しによるトーラス体の自己同相写像を考えることにより、次を示せ。

**問題 8.6**  $L(p, q) \cong L(-p, q) \cong L(p, -q) \cong L(-p, -q)$ 。

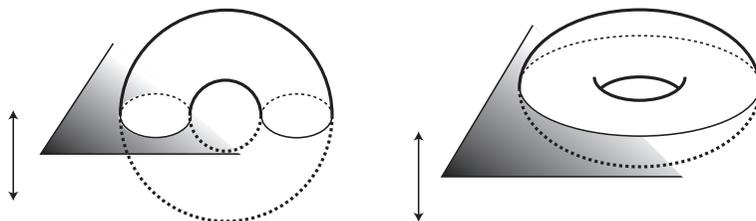


図 8.4

問題 8.6 より、 $0 \leq p, 0 \leq q$  としてよいことがわかる。次に図 8.5 に示した、メリディアン円板に沿って 1 回ひねるトーラス体の自己同相写像を考えることにより、次を示せ。

**問題 8.7** 任意の整数  $k$  に対して、 $L(p, q) \cong L(p, q + kp)$ 。

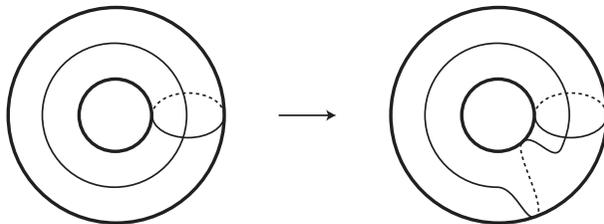


図 8.5

問題 8.4 より、 $L(p, q)$  と  $L(p', q')$  (ただし  $0 \leq p, 0 \leq p'$ ) が同相ならば  $p = p'$  が成り立つので、これは二つのレンズ空間が同相であるための必要条件である。また問題 8.7 は、 $q' = q + kp$  が一つの十分条件であることを示しているが、レンズ空間は次のように分類される。

**定理 8.6 ([Br], [Bn])** 二つのレンズ空間  $L(p, q)$  と  $L(p', q')$  (ただし  $0 \leq p, 0 \leq p'$ ) が同相であるための必要十分条件は、 $p = p'$  であり、 $q \equiv \pm q' \pmod{p}$  または  $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$  が成り立つことである。

この証明は省略するが、これによって種数 1 のヒーガード分解をもつ 3 次元多様体は、完全に分類されていることがわかる。

ところで、ここまで議論を進めてくると、一般の3次元多様体を分類するには、各種数  $g$  に対して種数  $g$  のヒーガード関式を表現し、上記のような分類定理を示せばよいということになる。確かにそうであるが、種数が1を越えるとヒーガード関式は複雑になり、そのような研究はあまり見あたらない。

問題 8.6 と問題 8.7 の一般化として次を示せ。これは上記の定理の十分性の証明でもある。

**問題 8.8** ある整数  $k$  に対して  $q = \pm q' + kp$  または  $qq' = \pm 1 + kp$  ならば、 $L(p, q) \cong L(p, q')$  である。

## 第9章

# 積多様体のヒーガード分解

$g$  を負でない整数とし,  $F_g$  を種数  $g$  の向き付け可能閉曲面とする。3.2 節で学んだように,  $F_g$  は,  $g = 0$  のときは 2 次元球面,  $g > 0$  のときは  $g$  個のトーラスの連結和である。本章において, 4.5 節で紹介した, 曲面と円周  $S^1$  との積である多様体  $F_g \times S^1$  のヒーガード種数を求める ([O1] 参照)。

### 9.1 ヒーガード分解の構成

向き付け可能閉 3 次元多様体  $M$  のヒーガード種数を,  $g(M)$  と書くことを思い出そう。このとき次が成り立つ。

**定理 9.1 ([O1])**  $g(F_g \times S^1) = 2g + 1$

本節と次節をとおして定理の証明を行うが,  $g = 0$  のときは,  $F_g \times S^1 = S^2 \times S^1$  なので, 問題 8.5 より定理の等式は成り立つ。よってこれ以降は,  $g > 0$  として議論を進める。

まず  $F_g \times S^1$  のヒーガード分解を具体的に構成してみよう。 $F_g$  の中に互いに交わらない二つの 2 次元円板を考え, それらを  $E_1, E_2$  とし,  $P_1 = \text{cl}(F_g - E_1)$ ,  $P_2 = \text{cl}(F_g - E_2)$  とおく。 $P_i$  ( $i = 1, 2$ ) は, 境界が一つの円周であるような曲面である。また  $S^1$  を二つの弧  $I_1, I_2$  の和集合と考え,  $S^1 = I_1 \cup I_2$  ただし  $I_1 \cap I_2 = \partial I_1 = \partial I_2$  とおき,  $V_1 = (P_1 \times I_1) \cup (E_2 \times I_2)$ ,  $V_2 = \text{cl}((F_g \times S^1) - V_1)$  とおく。このとき  $V_2 = (P_2 \times I_2) \cup (E_1 \times I_1)$  である。また,  $V_1, V_2$  はともに 3 次元多様体であり,  $F_g \times S^1 = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$  となる。ゆえに,  $V_1, V_2$  がともにハンドル体であることを示せば,  $(V_1, V_2)$  が  $F_g \times S^1$  のヒーガード分解であるといえる。そこでまず,  $V_1$  がハンドル体であることを示そう。

$F_g$  は種数  $g$  の向き付け可能閉曲面であるから, 図 9.1 に描いたように,  $P_1$  内に適切に埋め込まれた  $2g$  本の弧で,  $P_1$  を一つの 2 次元円板に切り開くものがとれる。これらを  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g}\}$  とし, 切り開いて得られた 2 次元円板を  $R_1$  とする。これらの弧は  $E_2$  に交わらないようにとることができるので,  $E_2 \subset R_1$  である。

$\alpha_i \times I_1 = D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2g$ ) とおく。 $\{D_1, D_2, \dots, D_{2g}\}$  は,  $V_1$  に適切に埋め込まれた  $2g$  個の 2 次元円板である。また  $I_2$  の内部に 1 点  $x$  をとり,  $E_2 \times \{x\} = D_{2g+1}$  とおく。 $D_{2g+1}$  も,  $V_1$  に適切に埋め込まれた 2 次元円板である。これで,  $V_1$  に適切に埋め込まれた  $2g + 1$  個の 2 次元円板  $\{D_1, D_2, \dots, D_{2g+1}\}$  が得られた。次にこれらの 2 次元円板で  $V_1$  を切り開く。まず  $D_{2g+1}$  で  $V_1$  を切り開くと,  $E_2 \times I_2$  自身を  $D_{2g+1}$  の正則近傍と考えること

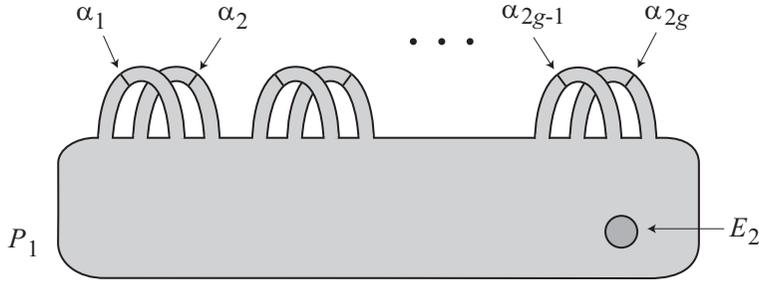


図 9.1

ができるので、 $V_1$  を  $D_{2g+1}$  で切り開いて得られる多様体は、 $P_1 \times I_1$  と同相になる。続いて  $\{D_1, D_2, \dots, D_{2g}\}$  で  $P_1 \times I_1$  を切り開くが、得られる多様体は、( $P_1$  を  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g}\}$  で切り開いたもの)  $\times I_1$  と同相なので、 $R_1 \times I_1$  となる。これは  $R_1$  が 2 次元円板であることから、3 次元球体に同相である。よって  $\{D_1, D_2, \dots, D_{2g+1}\}$  は、1 組の完備メリディアン円板系であり、定理 5.4 より、 $V_1$  が種数  $2g + 1$  のハンドル体であることが示された。

次に  $V_2$  であるが、 $V_2 = (P_2 \times I_2) \cup (E_1 \times I_1)$  であることから、全く同様の議論により  $V_2$  が種数  $2g + 1$  のハンドル体であることがわかる。よって  $(V_1, V_2)$  は、 $F_g \times S^1$  の種数  $2g + 1$  のヒーガード分解となり、

$$g(F_g \times S^1) \leq 2g + 1$$

という不等式が示された。

## 9.2 ヒーガード種数の決定

次に、逆の不等式  $g(F_g \times S^1) \geq 2g + 1$  を示そう。その為に、閉曲面の基本群と整数係数 1 次元ホモロジー群の表示を準備するが、証明は省略する ([4], [7] 等を参照されたい)。

次の命題において、 $N_g$  は種数  $g$  の向き付け不可能閉曲面である。

### 命題 9.2

$$(1) \pi_1(F_g) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$$

$$\pi_1(N_g) \cong \langle a_1, a_2, \dots, a_g \mid a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 = 1 \rangle$$

$$(2) H_1(F_g; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z} \quad (2g \text{ 個の } \mathbf{Z} \text{ の直和})$$

$$H_1(N_g; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2 \quad (g - 1 \text{ 個の } \mathbf{Z} \text{ と } 1 \text{ 個の } \mathbf{Z}_2 \text{ の直和})$$

さて、 $F_g \times S^1$  の基本群の生成元の最小数を  $r(F_g \times S^1)$  と書く。命題 9.2(2) より

$$H_1(F_g \times S^1; \mathbf{Z}) \cong H_1(F_g; \mathbf{Z}) \oplus H_1(S^1; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$$

( $2g + 1$  個の  $\mathbf{Z}$  の直和)

なので、 $H_1(F_g \times S^1; \mathbf{Z})$  の生成元の最小数は  $2g + 1$  である。よって、基本群を可換化したものが整数係数 1 次元ホモロジー群であることより、 $r(F_g \times S^1) \geq 2g + 1$  を得る。

一方、命題 9.2(1) と 7 章の例 1 より、 $\pi_1(F_g \times S^1)$  は  $2g + 1$  個の元から生成される表示

をもつので、 $r(F_g \times S^1) \leq 2g + 1$  である。したがって  $r(F_g \times S^1) = 2g + 1$  となり、系 7.6 より  $g(F_g \times S^1) \geq 2g + 1$  を得る。

この不等式と 9.1 節で得られた不等式を合わせて、定理 9.1 の証明が終わる。□

定理 9.1 より、3次元トーラス  $S^1 \times S^1 \times S^1 = F_1 \times S^1$  は、種数 3 のヒールガード分解をもつことがわかる。本章の最後に、そのヒールガード図式を実際に描いてみよう。

**問題 9.1** 3次元トーラス  $S^1 \times S^1 \times S^1$  の種数 3 のヒールガード図式を一つ描け。

「4次元」 本書は3次元多様体の入門書であるが、この3次元空間というのは「まえがき」でも述べたとおり、われわれが住んでいる空間のことである。また1次元は直線であり、2次元は平面である。では4次元空間というのは本当にあるのだろうか？ SF小説などではしばしば登場し、ワープするときは4次元空間を通るそうである。また物理学では、時間を4本目の軸にとり、時間と空間をあわせて4次元時空と言うそうである。では仮りに4次元空間が存在したとして、その中に入れば4次元というのが見えるかということ、残念ながら全体像を見ることはできない。なぜなら我々の眼球が3次元球体であるため、4次元空間の3次元断面が連続的に見えるだけとなる。4次元空間全体を見るには、4次元球体で作られた眼球が必要となる。

# 第10章

## 連結和

本章において、二つの向き付け可能な3次元多様体に対して、連結和という操作を行って、新しい3次元多様体を作ることを学ぶ。またこの状況を逆に考えて、新しくできた3次元多様体は、はじめの二つの3次元多様体に連結和分解されるという。そこで、もうこれ以上連結和分解できない3次元多様体のことを、素な多様体という。このとき、任意の向き付け可能閉3次元多様体は、有限個の素な向き付け可能閉3次元多様体に連結和分解され、その分解のしかたは一通りであるという定理が成り立つ。これは整数における、素因数分解の存在と一意性に対応する定理といえる。

### 10.1 連結和の定義

$M_1, M_2$  をコンパクトで向きが指定された3次元多様体とする。 $M_1, M_2$  の内部にそれぞれ3次元球体  $B_1, B_2$  をとり、 $M'_1 = \text{cl}(M_1 - B_1)$ ,  $M'_2 = \text{cl}(M_2 - B_2)$ ,  $\partial B_1 = S_1, \partial B_2 = S_2$  とおく。 $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) は  $\partial M'_i$  に含まれる2次元球面なので、 $M'_i$  の向きから  $S_i$  の向きが決まる。 $f: S_2 \rightarrow S_1$  を向きを逆にする同相写像とし、この  $f$  によって  $S_1$  と  $S_2$  を貼り合わせて得られる3次元多様体  $M'_1 \cup_f M'_2$  を、 $M_1 \# M_2$  と書き、 $M_1$  と  $M_2$  の連結和、または  $M_1$  と  $M_2$  から連結和を行って得られた3次元多様体という。また、 $f$  が向きを逆にする同相写像であることから、 $M_1 \# M_2$  には  $M_1, M_2$  からの向きが自然に決まる。またこの状況を逆に考えて、 $M_1 \# M_2$  は  $M_1$  と  $M_2$  の連結和に分解されるという。

以上が連結和の定義であるが、その定義は  $B_1, B_2$  の取り方と、同相写像  $f: S_2 \rightarrow S_1$  の取り方に依存しているので、できあがった多様体の位相形が、それらの取り方に依存しないということを示す必要がある。まず、 $B_1, B_2$  の取り方に依存しないということを保証するのが、次の補題である。本書では特に断りの無い限り、多様体はすべて連結としていることを思い出そう。

**補題 10.1**  $M$  を3次元多様体とし、 $B, B'$  を  $M$  の内部に含まれる二つの3次元球体とする。このとき、 $M$  のアンビエントイソトピー  $\{f_t\}: M \rightarrow M$  で  $f_0 = \text{id}$ ,  $f_1(B) = B'$  となるものが存在する。

**証明** まず  $B \cap B' = \emptyset$  とする。 $M$  は連結なので、 $B$  と  $B'$  を結ぶ弧が存在する。それを  $\alpha$  とし、 $B \cup \alpha \cup B'$  の  $M$  における正則近傍を  $N$  とする。系 2.5 より  $N$  は3次元球体である。次に3次元ユークリッド空間  $R^3$  を考え、原点を中心とする半径1の球体を  $C_1$ 、点

$(3, 0, 0)$  を中心とする半径 1 の球体を  $C_2$ ,  $C_1$  と  $C_2$  を  $x$  軸上で結ぶ弧を  $\beta$  とする。また,

$D_1 =$  原点を中心とする半径 2 の球体のうち第 1 座標が 0 以下の部分

$D_2 = (yz$  平面で原点を中心とする半径 2 の円板)  $\times [0, 3]$

$D_3 =$  点  $(3, 0, 0)$  を中心とする半径 2 の球体のうち  $x$  座標が 3 以上の部分

とし,  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$  とおく。このとき,  $N$  が 3 次元球体であることに注意すれば, 定理 2.8 と定理 2.10 を何度か用いることにより, 同相写像  $h : N \rightarrow D$  で  $h(B) = C_1$ ,  $h(B') = C_2$ ,  $h(\alpha) = \beta$  をみたすものが構成できる (図 10.1)。

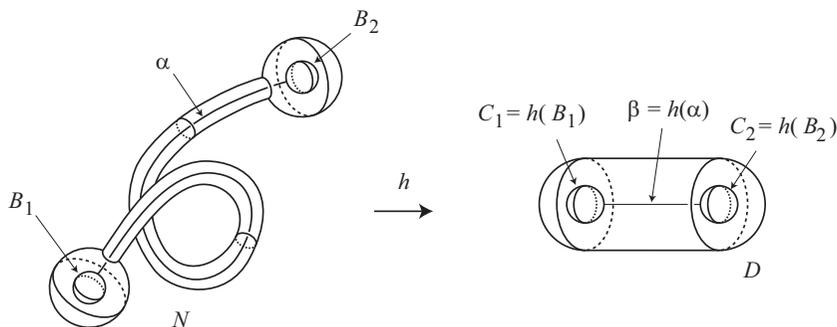


図 10.1

ここで  $D$  内の  $C_1$  と  $C_2$  に注目すると,  $D$  のアンビエントイソトピー  $\{g_t\} : D \rightarrow D$  で  $g_0 = \text{id}$ ,  $g_1(C_1) = C_2$  であり, 任意の  $t \in I$  に対して  $g_t|_{\partial D} = \text{id}$  となるものが構成できる。つまり,  $\beta$  に沿って  $C_1$  を  $C_2$  まですべらせるわけである。よって  $t \in I$  に対して,

$$f_t(x) = \begin{cases} x & (x \in M - N) \\ h^{-1} \circ g_t \circ h(x) & (x \in N) \end{cases}$$

とおくと,  $\{f_t\}$  が求めるアンビエントイソトピーである。

次に  $B \cap B' \neq \emptyset$  とする。  $x, x'$  を  $B, B'$  の内部に含まれる点とし,  $B(x), B(x')$  をそれぞれ  $B, B'$  に含まれる  $x, x'$  の十分小さい正則近傍とする。すなわち  $B(x) \cap B(x') = \emptyset$  とする。定理 2.9 より  $B$  を  $B(x)$  に,  $B'$  を  $B(x')$  にうつす  $M$  のアンビエントイソトピーが存在する。また前半の議論より  $B(x)$  を  $B(x')$  にうつす  $M$  のアンビエントイソトピーが存在する。よってこれらをつなげることにより, 求めるアンビエントイソトピーを得る。  $\square$

この補題により,  $\text{cl}(M - B)$  と  $\text{cl}(M - B')$  は同相となり, 連結和によってできあがる 3 次元多様体の位相形は, 3 次元球体のとり方によらないことがわかる。次に貼り合わせのための同相写像によらないということであるが, それは次の補題により示される。証明は省略するが, 定理 2.8, 2.9, 2.18 等を用いる。

**補題 10.2**  $S_1, S_2$  を向きをついた二つの 2 次元球面とし,  $f : S_2 \rightarrow S_1$ ,  $g : S_2 \rightarrow S_1$  をともに向きを保つか, またはともに向きを逆にするような同相写像とする。このとき,  $S_1$  のアンビエントイソトピー  $\{h_t\} : S_1 \rightarrow S_1$  で,  $h_0 = \text{id}$ ,  $h_1 \circ f = g$  となるものが存在する。

**問題 10.1**  $M_1, M_2, B_1, B_2, M'_1, M'_2, S_1, S_2$  を連結和の定義における 3 次元多様体, 3 次元球体, 2 次元球面とし,  $f: S_2 \rightarrow S_1, g: S_2 \rightarrow S_1$  を, ともに向きを逆にする同相写像とする。また,  $f, g$  によって  $S_1$  と  $S_2$  を貼り合わせて得られる 3 次元多様体を  $M_f = M'_1 \cup_f M'_2, M_g = M'_1 \cup_g M'_2$  とする。このとき補題 10.2 を用いて,  $M_f$  と  $M_g$  が同相であることを示せ (補題 8.2 の証明を参考にせよ)。

以上で, 連結和  $M_1 \# M_2$  の定義の正当性が証明された。

## 10.2 既約多様体と素な多様体

$M$  を 3 次元多様体とする。 $M$  が  $M = M_1 \# M_2$  と連結和分解されるならば,  $M_1$  と  $M_2$  のうち少なくとも一方は 3 次元球面となるとき,  $M$  を素, または素な 3 次元多様体という。ただし, 3 次元球面  $S^3$  は素ではないと定める。

また,  $M$  に埋め込まれた任意の 2 次元球面  $S$  に対して,  $M$  の中の 3 次元球体  $B$  で  $\partial B = S$  となるものがあるとき,  $M$  を既約, または既約 3 次元多様体という。

$S$  を 3 次元多様体  $M$  の中の 2 次元球面とする。 $S$  が  $M$  を二つの部分に分けるとき,  $S$  を分離的といい, そうでないとき非分離的という。 $M$  の中の 3 次元球体  $B$  で  $\partial B = S$  となるものがあるとき,  $S$  を非本質的といい, そうでないとき本質的という。したがって,  $M$  が既約であるとは  $M$  が本質的 2 次元球面を持たないということである。

**命題 10.3** 3 次元球面  $S^3$  は既約である。

**証明**  $S$  を  $S^3$  内の任意の 2 次元球面とする。定理 2.8 より  $S$  は非本質的である。よって  $S^3$  は既約である。  $\square$

**命題 10.4** 3 次元多様体  $M$  (ただし  $S^3$  を除く) が既約ならば,  $M$  は素である。

**証明**  $M = M_1 \# M_2$  を  $M$  の任意の連結和分解とする。 $M_1, M_2$  内の 3 次元球体  $B_1, B_2$  に対して,  $M = \text{cl}(M_1 - B_1) \cup \text{cl}(M_2 - B_2)$  である。 $S$  をこの連結和分解を与える  $M$  内の 2 次元球面とすると,  $M$  が既約であることから,  $\text{cl}(M_1 - B_1)$  が 3 次元球体であるとしてよい。よって  $M_1 = \text{cl}(M_1 - B_1) \cup B_1$  は 3 次元球面となり,  $M$  は素である。  $\square$

**命題 10.5**  $S^2 \times S^1$  は素であるが既約でない。

**証明**  $x$  を  $S^1$  内のある点とすると,  $S^2 \times \{x\}$  は  $S^2 \times S^1$  内の非分離的 2 次元球面である。よって  $S^2 \times \{x\}$  は本質的 2 次元球面であり,  $S^2 \times S^1$  は既約ではない。 $S^2 \times S^1$  が素であることを示すには,  $S^2 \times S^1$  内の任意の分離的 2 次元球面は非本質的であることを示せばよい。

$S$  を  $S^2 \times S^1$  内の任意の分離的 2 次元球面とする。また  $x$  を  $S^1$  内のある点とし,  $S_0 = S^2 \times \{x\}$  とおく。 $S_0$  によって  $S^2 \times S^1$  を切り開いて得られる 3 次元多様体は  $S^2 \times I$  に同相であり,  $\partial(S^2 \times I) = S^2 \times \partial I = S_1 \cup S_2$  とおく。また,  $B_1$  を 3 次元球体とし,  $\partial B_1$  と  $S_1$  を同一視して得られる 3 次元多様体  $(S^2 \times I) \cup B_1$  を  $B$  とおく。 $B$  は 3 次元球体で

ある。

定理 2.14 より  $S \cap S_0$  は有限個の円周としてよいので、 $n$  をそれらの個数とし、 $n$  についての数学的帰納法で示す。

$n = 0$  のとき、 $S \subset S^2 \times I \subset B$  なので、定理 2.8 より  $S$  は  $B$  内の 3次元球体  $B'$  の境界となる。 $S \cap B_1 = \emptyset$  より  $B_1 \subset B'$  かまたは  $B_1 \cap B' = \emptyset$  である。 $B_1 \subset B'$  ならば定理 2.9 より、 $S$  は  $S_1$  に  $S^2 \times S^1$  内でアンビエントイソトピックである。これは  $S$  が分離的であることに矛盾する。よって  $B_1 \cap B' = \emptyset$  であり、 $B' \subset S^2 \times S^1$  である。これは  $S$  が  $S^2 \times S^1$  内の 3次元球体の境界となることを意味しており、 $S$  は非本質的である。

$n > 0$  とし、 $S_0$  との交わりの円周の個数が  $n - 1$  までの分離的 2次元球面は、非本質的であると仮定する。

$S \cap S_0$  の連結成分は有限個の円周なので、定理 2.9 より、 $S$  内の 2次元円板  $D$  で  $D \cap (S \cap S_0) = \partial D$  となるものが存在する (図 10.2)。この  $\partial D$  を、 $S \cap S_0$  の連結成分のうち  $S$  上最も内側の円周という。

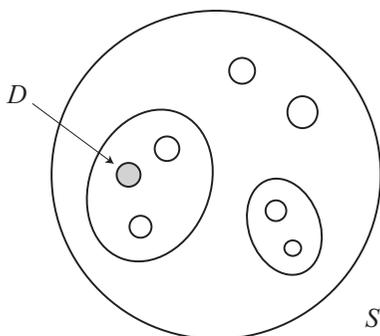


図 10.2

このとき  $D$  は  $S^2 \times I$  に適切に埋め込まれた 2次元円板であり、 $\partial D \subset S_1$  としてよい。 $\partial D$  は  $S_1$  を二つの 2次元円板に分けるので、それらを  $D_1, D_2$  とおき、 $P_1 = D \cup D_1$ 、 $P_2 = D \cup D_2$  とおく。これらは  $S^2 \times I$  内の二つの 2次元球面である。このとき、 $n = 0$  のときと同様の議論を行い、 $P_1$  は  $S^2 \times I$  内のある 3次元球体  $B_0$  の境界としてよい。よってこの  $B_0$  に沿ったアンビエントイソトピーを行って、 $S^2 \times S^1$  の中で  $D$  を  $D_1$  に重ね合わせ、さらに  $D_1$  より少しずらす (図 10.3)。これは  $S^2 \times S^1$  の中で  $S$  を動かすアンビエントイソトピーなので、 $S$  の動いた先を  $S'$  とする。このとき、 $S'$  と  $S_0$  との交わりは  $n$  より少なくとも一つは減っているので、帰納法の仮定より  $S'$  は非本質的となる。しかも  $S'$  はアンビエントイソトピーによる  $S$  の像なので、 $S$  が非本質的となる。よって数学的帰納法により命題の証明が終わる。□

**補題 10.6**  $M$  を向き付け可能 3次元多様体とする。 $M$  が非分離的 2次元球面を含むならば、ある 3次元多様体  $M_1$  によって、 $M \cong M_1 \# S^2 \times S^1$  となる。

**証明**  $S$  を  $M$  内の非分離的 2次元球面とする。 $S$  は非分離的なので、 $S$  と 1 点で横断的に交わる  $M$  内の単純閉曲線があり、それを  $\alpha$  とする。

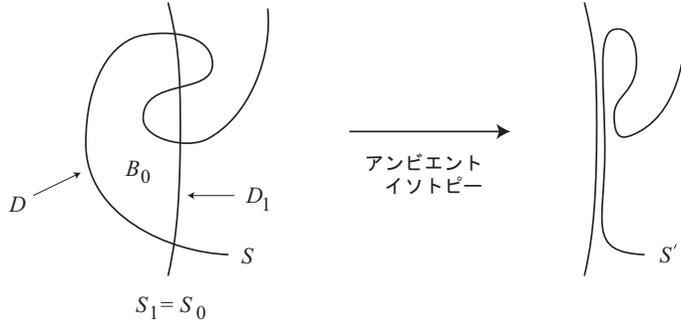


図 10.3

$N(S \cup \alpha)$  を  $S \cup \alpha$  の  $M$  における正則近傍とし,  $S' = \partial N(S \cup \alpha)$  とおく.  $S'$  は  $M$  内の分離的 2 次元球面であり,  $M$  をある 3 次元多様体  $M'_1$  と  $N(S \cup \alpha)$  とに分ける. ここで, 二つの 3 次元球体  $B_1, B_2$  を  $M'_1, N(S \cup \alpha)$  に,  $S'$  において貼り合わせたものを  $M_1 = M'_1 \cup B_1, M_2 = N(S \cup \alpha) \cup B_2$  とおく. このとき  $M_2 \cong S^2 \times S^1$  なので (問題 10.2),  $M \cong M_1 \# S^2 \times S^1$  である.  $\square$

**問題 10.2** 補題 10.6 の証明において,  $M_2 = N(S \cup \alpha) \cup B_2$  が  $S^2 \times S^1$  に同相であることを示せ.

**命題 10.7**  $M$  を向き付け可能 3 次元多様体とする. このとき次の (1), (2) が成り立つ.

- (1)  $M$  が既約であるが素でないならば,  $M$  は  $S^3$  に同相である.
- (2)  $M$  が素であるが既約でないならば,  $M$  は  $S^2 \times S^1$  に同相である.

**証明** (1) は命題 10.3, 10.4 と素の定義より従う.

(2) を示す.  $M$  が既約でないことより,  $M$  は本質的 2 次元球面  $S$  をもつ. 今  $S$  が  $M$  内の分離的 2 次元球面であるとする. このとき  $S$  は  $M$  を二つの部分に分けるのでそれらを  $M'_1, M'_2$  とする. また  $B_1, B_2$  を二つの 3 次元球体とし  $M'_1, M'_2$  に  $B_1, B_2$  を  $S$  において貼り合わせたものを,  $M_1, M_2$  とする. このとき,  $M = M_1 \# M_2$  であり  $M$  は素なので,  $M_1 \cong S^3$  としてよい. よって  $M'_1 = \text{cl}(M_1 - B_1)$  は定理 2.8 より 3 次元球体であり,  $S$  はその境界となる. すなわち  $S$  は非本質的となり矛盾である. したがって  $S$  は非分離的である. このとき, 補題 10.6 より  $M \cong M_1 \# S^2 \times S^1$  である. ここで  $M$  は素なので  $M_1 \cong S^3$ . すなわち  $M \cong S^2 \times S^1$  である.  $\square$

### 10.3 連結和分解の存在と一意性

10.1 節において, 3 次元多様体の連結和分解というものを学んだが, 次の定理はその存在を保証するものである. これはクネーザーによって証明された.

**定理 10.8 ([Kn])**  $M$  を  $S^3$  でない向き付け可能閉 3 次元多様体とする. このとき  $M$  は, 有限個の素な向き付け可能閉 3 次元多様体の連結和に分解される.

この定理の証明は 11 章で行う。次の定理は連結和分解の一意性を保証する。これはミルナーによって証明された。

**定理 10.9 ([Mi])**  $M$  を  $S^3$  でない向き付け可能閉 3 次元多様体とする。 $M$  が  $M_1 \# M_2 \# \cdots \# M_m$  と  $N_1 \# N_2 \# \cdots \# N_n$  の 2 通りの素な向き付け可能閉 3 次元多様体の連結和に分解されるならば、 $m = n$  であり、(必要ならば添え字の順序を変えることにより)、 $M_i$  と  $N_i$  は同相になる ( $i = 1, 2, \dots, m$ )。

本節の目標はこの定理を証明することである。証明はミルナーの証明 ([Mi]) にしたがって行う。

**【注意】** 定理 10.8 と 10.9 は、いずれも境界をもつ 3 次元多様体に対しても示されているが、本書では簡単のため閉 3 次元多様体に限ることとする。

$N$  をコンパクトな向き付け可能 3 次元多様体とし、 $\partial N$  の連結成分にいくつかの 2 次元球面があるとす。このときそれらに、同じ数だけの 3 次元球体を貼り合わせて得られる 3 次元多様体を、 $\text{Cap}N$  と書く。

次に、 $S^2 \times S^1$  において  $S = S^2 \times \{x\}$  とおく (ただし  $x \in S^1$ )。  $S$  は  $S^2 \times S^1$  内の非分離的 2 次元球面である。また  $M_1$  をある向き付け可能閉 3 次元多様体とし、 $M = M_1 \# S^2 \times S^1$  とすると、 $S$  は  $M$  内の非分離的 2 次元球面である。

**問題 10.3** (1)  $S^2 \times S^1$  を、上記の  $S = S^2 \times \{x\}$  で切り開いて得られる 3 次元多様体を  $N$  とすると、 $\text{Cap}N \cong S^3$  であることを示せ。

(2)  $M = M_1 \# S^2 \times S^1$  を、(1) と同じ  $S$  で切り開いて得られる 3 次元多様体を  $N$  とすると、 $\text{Cap}N \cong M_1$  であることを示せ。

**補題 10.10**  $M$  を  $S^3$  でない向き付け可能閉 3 次元多様体とし、 $M \cong M_1 \# M_2 \# \cdots \# M_m$  を素な多様体への連結和分解とする。 $M$  が  $S^3$  でない多様体  $L_1, L_2$  によって、 $M \cong L_1 \# L_2$  と表されるならば (必要ならば添え字の順序を変えることにより)、 $L_1 \cong M_1 \# \cdots \# M_p$ 、 $L_2 \cong M_{p+1} \# \cdots \# M_m$  となる。

**証明** 補題を二通りの場合に分けて示す。

(1)  $M_1, M_2, \dots, M_m$  の中に、 $S^2 \times S^1$  でないものがあるとき。

$M_i \not\cong S^2 \times S^1 (i = 1, 2, \dots, k)$ 、 $M_j \cong S^2 \times S^1 (j = k + 1, \dots, m)$  とする。このとき、 $M \cong M_1 \# \cdots \# M_k \# M_{k+1} \# \cdots \# M_m$  である。ここで、 $M_1 \# \cdots \# M_k$  を  $M_1$  に  $M_2, \dots, M_k$  を連結和したものと考え、 $M_1$  と  $M_2, \dots, M_k$  との連結和を与えるための  $M$  内の 2 次元球面を  $S_2, \dots, S_k$  とする。また、 $M_{k+1}, \dots, M_m$  内の非分離的 2 次元球面を  $S_{k+1}, \dots, S_m$  とし、それらを  $M$  内の非分離的 2 次元球面と考える。

$$\Sigma = S_2 \cup \cdots \cup S_k \cup S_{k+1} \cup \cdots \cup S_m$$

とおく。 $\Sigma$  は空集合か、または  $M$  内の互いに交わらない  $m - 1$  個の 2 次元球面である。これらの作り方と問題 10.3 より、 $\Sigma$  は次の性質 (\*) をもつ。

(\*)  $M$  を  $\Sigma$  で切り開いて得られる 3 次元多様体を  $M'$  とすると,  $M'$  は  $k$  個の連結成分  $N_1, N_2, \dots, N_k$  をもち (必要ならば添え字の順序を変えることにより),  $\text{Cap}N_i \cong M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) となる

次に  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) を  $L_i$  内の 3 次元球体とし,  $L'_i = \text{cl}(L_i - C_i)$  とおく。  $M$  は  $L'_1$  と  $L'_2$  から  $\partial C_1$  と  $\partial C_2$  を貼り合わせて得られるので,  $M = L'_1 \cup L'_2$  (ただし  $\partial C_1 = \partial C_2$ ) である。ゆえに,  $S_0 = \partial C_1 = \partial C_2$  とおくと,  $S_0$  は  $M$  の連結和分解  $M \cong L_1 \# L_2$  を与える 2 次元球面である。このとき定理 2.14 より,  $\Sigma$  と  $S_0$  との交わりは有限個の円周としてよい。  $n = |\Sigma \cap S_0|$  をその円周の個数とし, (1) の場合を  $n$  についての数学的帰納法で示す。

$n = 0$  のとき,  $S_0$  はある  $N_i$  に含まれる。  $S_0$  は  $M$  内の分離的 2 次元球面なので,  $S_0$  は  $N_i$  を二つの部分  $N'_i, N''_i$  に分ける (図 10.4)。

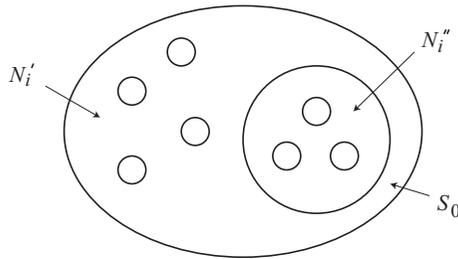


図 10.4

このとき  $M' \cong N_1 \cup \dots \cup N'_i \cup N''_i \cup \dots \cup N_k$  なので (必要ならば添え字の順序を変えることにより),

$$(N_1 \cup \dots \cup N_{i-1} \cup N'_i) \subset L'_1, \quad (N''_i \cup N_{i+1} \cup \dots \cup N_k) \subset L'_2$$

である。ここで  $\text{Cap}N_i \cong M_i$  は素であり,  $M_i \not\cong S^2 \times S^1$  なので, 命題 10.7 より  $M_i$  は既約である。よって  $\text{Cap}N''_i \cong S^3$  としてよい (問題 10.4)。したがって,

$$\begin{aligned} L_1 &\cong M_1 \# \dots \# M_i \# (S^2 \times S^1) \# \dots \# (S^2 \times S^1), \\ L_2 &\cong M_{i+1} \# \dots \# M_k \# (S^2 \times S^1) \# \dots \# (S^2 \times S^1) \end{aligned}$$

となり,  $n = 0$  のときの証明が終わる。

次に  $n > 0$  とし,  $|\Sigma \cap S_0| < n$  であるような条件 (\*) をみたす  $\Sigma$  が存在すれば, 補題の結論が成り立つと仮定する。

$\Sigma \cap S_0$  は  $S_0$  上のいくつかの単純閉曲線なので,  $S_0$  上最も内側の連結成分を  $C$  とし,  $C$  を境界とする  $S_0$  上最も内側の 2 次元円板を  $D$  とする。このとき  $D$  はある  $N_i$  に適切に埋め込まれた 2 次元円板である。ここで  $n = 0$  のときと同様に,  $\text{Cap}N_i \cong M_i$  は既約多様体なので,  $D$  は  $N_i$  を二つの部分  $N'_i, N''_i$  に分け,  $\text{Cap}N''_i \cong S^3$  としてよい (問題 10.4)。一方  $\partial D$  はある  $S_\ell$  に含まれる。ここで  $\ell$  について, 2 通りの場合を考える。

(i)  $2 \leq \ell \leq k$  のとき,  $S_\ell$  は  $M$  内の分離的 2 次元球面である。よって  $N_i \cap N_j = \partial N_i \cap \partial N_j = S_\ell$  となる  $N_j$  (ただし  $i \neq j$ ) が存在する。定理 2.8 より  $\partial D$  は  $S_\ell$  を二つの 2 次元円板  $E', E''$  に分けるので,  $E' \subset \partial N'_i, E'' \subset \partial N''_i$  としてよい。定理 2.12 より

$E' \cup D$  は 2 次元球面なので、 $E' \cup D$  を  $N'_i$  内に少し押し込んだ 2 次元球面を  $S'_\ell$  とし、

$$\Sigma' = S_2 \cup \cdots \cup S_{\ell-1} \cup S'_\ell \cup S_{\ell+1} \cup \cdots \cup S_m$$

とおき、 $N'_j = N_j \cup N''_i$  とおく (図 10.5)。

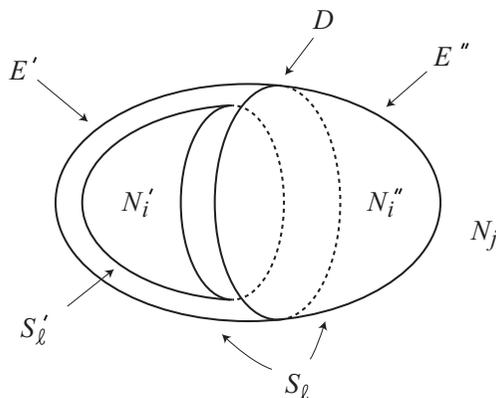


図 10.5

このとき、 $M$  を  $\Sigma'$  で切り開くと  $N_1, \dots, N'_i, \dots, N'_j, \dots, N_k$  が得られ、 $\text{Cap}N''_i \cong S^3$  より  $\text{Cap}N'_i \cong M_i$ ,  $\text{Cap}N'_j \cong M_j$  である。しかも  $\Sigma'$  の作り方より  $|\Sigma' \cap S_0| < n$  である。したがって帰納法の仮定より補題の結論が成り立つ。

(ii)  $k+1 \leq \ell \leq m$  のとき、 $S_\ell$  は  $M$  内の非分離的 2 次元球面であり、 $S_\ell$  の両側はともに  $N_i$  である。 $\text{Cap}N''_i \cong S^3$  より  $N_i$  から  $N''_i$  を切り放し、(i) における  $E''$  に沿って再び  $N_i$  に貼り合わせたものを  $N'''_i$  とおく。また、(i) と同様に  $S_\ell$  から作った 2 次元球面を  $S'_\ell$  とし、

$$\Sigma' = S_1 \cup \cdots \cup S_{\ell-1} \cup S'_\ell \cup S_{\ell+1} \cup \cdots \cup S_{m-1}$$

とおく。このとき  $M$  を  $\Sigma'$  で切り開くと  $N_1, \dots, N_{i-1}, N'''_i, N_{i+1}, \dots, N_k$  が得られ、 $\text{Cap}N''_i \cong S^3$  より  $\text{Cap}N'''_i \cong M_i$  である。しかも  $\Sigma'$  の作り方から  $|\Sigma' \cap S_0| < n$  である。したがって帰納法の仮定より補題の結論が成り立つ。

(2)  $M_1, M_2, \dots, M_m$  がすべて  $S^2 \times S^1$  のとき。

$M \cong S^3 \# M_1 \# \cdots \# M_m$  と考え、 $M$  内の  $m$  個の非分離的 2 次元球面を  $S_1, S_2, \dots, S_m$  とおき、 $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$  とおく。このとき  $\Sigma$  は次の性質 (\*) をもつ。

(\*)  $M$  を  $\Sigma$  で切り開いて得られる 3 次元多様体を  $M'$  とすると、 $\text{Cap}M' \cong S^3$  である。

よって、この条件 (\*) をみたす  $\Sigma$  と、連結和  $M \cong L_1 \# L_2$  を与える 2 次元球面  $S_0$  との交わりを考えることにより、(1) の場合と同じ方法を用いることができ、補題の証明が終わる。□

【注意】 補題 10.10 の証明において、2 次元球面  $S_\ell$  から新たな 2 次元球面  $S'_\ell$  を作ったが、このような方法を切り貼り技法という (11.2 節参照)。

**問題 10.16** 補題 10.14 の証明において,  $\text{Cap}N_i'' \cong S^3$  としてよいことを示せ。

**定理 10.9 の証明**  $m$  についての数学的帰納法で示す。

$m = 1$  のとき。  $M$  は素なので,  $m = n = 1$  であり,  $M \cong M_1 \cong N_1$  である。

$m > 1$  のとき。  $m - 1$  までは定理の結論が成り立つと仮定する。

$M \cong (M_1 \# \cdots \# M_{m-1}) \# M_m$  と考えると, 補題 10.10 より, ある  $p$  に対して

$$M_1 \# \cdots \# M_{m-1} \cong N_1 \# \cdots \# N_p, \quad M_m \cong N_{p+1} \# \cdots \# N_n$$

である。ここで  $M_m$  は素なので,  $M_m \cong N_n$  であり,

$$M_1 \# \cdots \# M_{m-1} \cong N_1 \# \cdots \# N_{n-1}$$

となる。このとき, 帰納法の仮定より  $m - 1 = n - 1$  であり,  $M_i \cong N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) が成り立ち, 証明が終わる。  $\square$

以上で連結和分解の一意性の証明が終わったが, 多様体が向き付け不可能な場合は, 連結和分解の一意性が成り立たないことが知られている。実際, 多様体が向き付け不可能な場合は, 補題 10.10 は成り立たない。

**問題 10.5** 補題 10.10 の証明のどの部分において, 多様体の向き付け可能性が必要かを考えよ。

# 第11章

## ヒーガード分解と連結和

本章において、向き付け可能閉3次元多様体の連結和と、ヒーガード分解との関係について学ぶ。そして、3次元多様体  $M$  が  $M = M_1 \# M_2$  となっているとき、それらのヒーガード種数の間に  $g(M) = g(M_1) + g(M_2)$  という関係が成り立つことを示す。また、10章で省略した連結和分解の存在も同時に示す。連結和分解の存在はクネーザー ([Kn]) によって示された。また、ヒーガード種数の加法性はハーケン ([Ha2]) によって示された。しかしここでは、ともにジェイコ ([12]) による証明を紹介する。

### 11.1 曲面の階層

$P$  を境界のあるコンパクトな曲面とし、 $\alpha$  を  $P$  に適切に埋め込まれた弧とする。 $P$  内の2次元円板  $D$  で、 $\partial D = \alpha \cup \beta$ ,  $\alpha \cap \beta = \partial\alpha = \partial\beta$  (ただし  $\beta$  は  $\partial P$  内の弧), となるものがあるとき  $\alpha$  を非本質的といい、そのような2次元円板がないとき  $\alpha$  を本質的という。 $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n, n+1$ ) を境界のあるコンパクトな曲面とし、 $\alpha_i$  を  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) に適切に埋め込まれた本質的な弧とする。これらの組の列  $(P_1, \alpha_1), (P_2, \alpha_2), \dots, (P_n, \alpha_n)$  と  $P_{n+1}$  が次の条件 (1), (2), (3) をみたすとき、この列を  $P$  の階層という。

- (1)  $P = P_1$ 。
- (2)  $P_{i+1}$  は  $P_i$  を  $\alpha_i$  に沿って切り開いて得られる曲面 ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。
- (3)  $P_{n+1}$  の連結成分はすべて2次元円板。

**例 1**  $P$  を2次元円板から、三つの2次元円板の内部を取り除いて得られる曲面とする。図 11.1 の (1), (2), (3) のうち、(1) と (2) における  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  は  $P$  の階層となるが、(3) は  $P$  の階層とはならない。なぜなら、 $\alpha_2$  は  $P_2$  において本質的ではないからである。

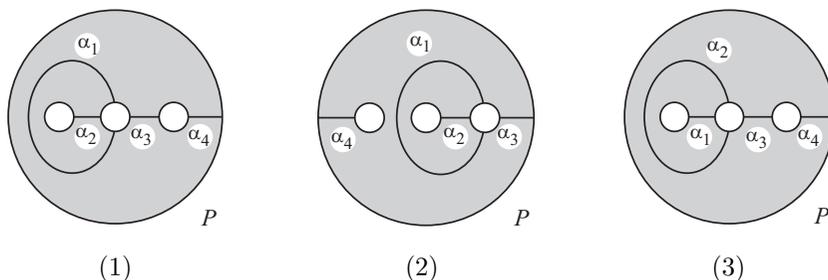


図 11.1

**補題 11.1**  $P$  を、2次元球面から  $b$  個の2次元円板の内部を取り除いた曲面とし (ただし  $b > 1$ )、 $(P_1, \alpha_1), (P_2, \alpha_2), \dots, (P_n, \alpha_n)$  を  $P$  の階層とする。このとき、 $P_{n+1}$  の連結成分の個数を  $d$  とすると、 $d \leq b - 1$  である。

**証明**  $b$  についての数学的帰納法で示す。

$b = 2$  のとき、 $P$  はアニュラスなので、 $\alpha_1$  が  $P_1$  で本質的であることに注意すると、階層は図 11.2 のような  $(P_1, \alpha_1)$  である。よって  $P_2$  は一つの2次元円板となるので、 $d = 1 = b - 1$  が成り立つ。

$b > 2$  のとき、 $b - 1$  までは求める不等式が成り立つと仮定する。 $\alpha_1$  について次の2通りの場合がある。

$\alpha_1$  が  $\partial P_1$  の異なる連結成分をつなぐとき (図 11.3(1))。

この場合、 $P_2$  は2次元球面から  $b - 1$  個の2次元円板の内部を取り除いた曲面である。よって、階層  $(P_2, \alpha_2), (P_3, \alpha_3), \dots, (P_n, \alpha_n)$  に帰納法の仮定を用いると、 $d \leq (b - 1) - 1 = b - 2 < b - 1$  である。

$\alpha_1$  が  $\partial P_1$  の一つの連結成分のみに交わっているとき (図 11.3(2))。

この場合、 $P_2$  は二つの連結成分からなり、それらを  $Q, R$  とする。 $\partial Q, \partial R$  の連結成分の個数をそれぞれ  $b_1, b_2$  とすれば、 $\alpha_1$  が  $P_1$  において本質的であることから、 $b_1 < b$  であり  $b_2 < b$  である。またその作り方より  $b_1 + b_2 = b + 1$  である。 $P$  の階層から導かれる  $Q, R$  の階層をそれぞれ  $\{(Q_i, \beta_i)\}_{i=1}^{b_1}, \{(R_j, \gamma_j)\}_{j=1}^{b_2}$  とし、 $Q_{b_1+1}, R_{b_2+1}$  の連結成分の個数をそれぞれ  $d_1, d_2$  とすると、帰納法の仮定から、 $d_1 \leq b_1 - 1, d_2 \leq b_2 - 1$  である。ここで、 $d_1 + d_2 = d$  と  $b_1 + b_2 = b + 1$  に注意すると、 $d = d_1 + d_2 \leq (b_1 - 1) + (b_2 - 1) = b_1 + b_2 - 2 = b - 1$  である。よって、数学的帰納法により補題は証明された。  $\square$

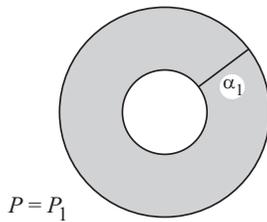


図 11.2

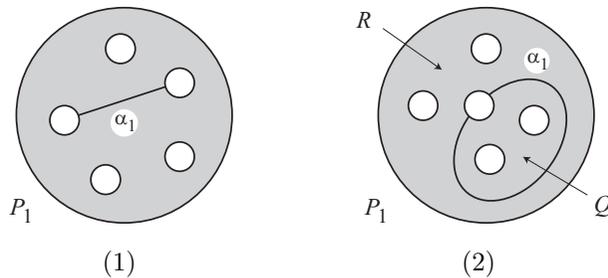


図 11.3

## 11.2 切り貼り技法

本節では、次節において必要となるいくつかの補題を示す。これらは、3次元多様体内の2次元球面や2次元円板から、それらの交わりを利用して、新しい2次元球面や2次元円板を作り出すというものである。このように、曲面の交わりを利用して新しい曲面を作り出す方法を、切り貼り技法とよんでいる。

$M$  を3次元多様体とし、 $S$  を  $M$  内の2次元球面とする。また  $D$  を  $M$  内の2次元円板で、 $D \cap S = \partial D$  という条件をみたしているものとする。このとき定理 2.8 より、 $\partial D$  は  $S$  を二つの2次元円板  $Q_1, Q_2$  に分ける。そこで  $P_1 = D \cup Q_1, P_2 = D \cup Q_2$  とおくと、定理 2.12 より  $P_1, P_2$  はともに  $M$  内の2次元球面となる。

**補題 11.2** 上記の仮定のもとに、 $S$  が  $M$  において本質的ならば、 $P_1$  と  $P_2$  のうちの少なくとも一方は、 $M$  において本質的である。

**証明**  $P_1, P_2$  がどちらも非本質的とし、それらを境界とするような  $M$  内の3次元球体を、それぞれ  $B_1, B_2$  とする。このとき、次の2通りの場合がある。

$B_1 \cap B_2 = \partial B_1 \cap \partial B_2 = D$ 。このとき、定理 2.13 より  $B_1 \cup B_2$  は3次元球体であり、 $\partial(B_1 \cup B_2) = \text{cl}((P_1 \cup P_2) - D) = S$  なので  $S$  は非本質的である。これは仮定に矛盾する。

$B_1 \cap B_2 = B_1$  または  $B_2$ 。このとき  $B_1 \subset B_2$  としてよいので、 $Q_1$  は  $B_2$  に適切に埋め込まれた2次元円板である。定理 2.11 より  $Q_1$  は  $B_2$  を二つの3次元球体に分ける。そのうちのひとつは  $B_1$  であり、もうひとつを  $B_3$  とする。このとき、 $\partial B_3 = Q_1 \cup (\partial B_3 \cap \partial B_2) = Q_1 \cup Q_2 = S$  なので  $S$  は非本質的である。これも仮定に矛盾する。よって  $P_1$  と  $P_2$  のうち少なくとも一方は  $M$  において本質的である。  $\square$

**補題 11.3** ハンドル体は既約多様体である。

**証明**  $V$  をハンドル体とし、 $S$  を  $V$  内の2次元球面とする。 $V$  は  $S^3$  に埋め込まれているとしてよいので、 $S$  を  $S^3$  内の2次元球面と考える。このとき定理 2.8 より、 $S$  は  $S^3$  を二つの3次元球体  $B_1, B_2$  に分ける。ここで  $\partial V$  は連結なので  $\partial V \subset B_1$  としてよい。このとき  $B_2 \subset V$  であり、 $S$  は  $V$  内の3次元球体  $B_2$  の境界となる。すなわち  $V$  は既約である。  $\square$

$M$  を3次元多様体とし、 $D$  を  $M$  に適切に埋め込まれた2次元円板とする。 $\partial M$  内の2次元円板  $D'$  で、 $\partial D' = \partial D$  であり、 $D \cup D'$  (2次元球面) が  $M$  内の3次元球体の境界となるようなものがあるとき、 $D$  を非本質的という。また、そのような2次元円板がないとき、 $D$  を本質的という。 $M$  に適切に埋め込まれた曲面  $F$  が  $M$  を二つの部分に分けると、 $F$  を分離的といい、そうでないとき非分離的という。

**補題 11.4** トーラス体に適切に埋め込まれた本質的2次元円板は、非分離的であり、トーラス体を3次元球体に切り開く。

**証明**  $V$  をトーラス体とし  $D$  を  $V$  に適切に埋め込まれた本質的2次元円板とする。 $\partial D$  はトーラス  $\partial V$  上の単純閉曲線である。

$\partial D$  が  $\partial V$  上の非本質的単純閉曲線とすると、 $\partial D$  は  $\partial V$  上のある 2 次元円板  $D'$  の境界になる。このとき  $D \cup D'$  は  $V$  内の 2 次元球面であり、補題 11.3 から  $V$  内の 3 次元球体  $B$  で、 $\partial B = D \cup D'$  となるものがある。これは  $D$  が本質的であることに矛盾する。

$\partial D$  が  $\partial V$  上で本質的であるとすると、命題 8.1 より、 $\partial D$  は  $\partial V$  をアニユラスに切り開く。このとき  $\partial D$  は  $\partial V$  を二つの部分には分けないので、 $D$  も  $V$  を二つの部分には分けない。よって  $D$  は非分離的である。また  $N(D)$  を  $D$  の  $V$  における正則近傍で、 $N(D) \cap \partial V$  が  $\partial D$  の  $\partial V$  における正則近傍となるものとする。 $B = \text{cl}(V - N(D))$  とおくと、 $\text{cl}(\partial V - N(D))$  がアニユラスであることから、 $\partial B = \text{cl}(\partial V - N(D)) \cup \text{cl}(\partial N(D) - \partial V)$  は 2 次元球面である。このとき、補題 11.3 より  $B$  は 3 次元球体であり、 $D$  は  $V$  を 3 次元球体  $B$  に切り開く。 □

補題 11.4 と 5.2 節における定義より、トーラス体  $V$  内の本質的 2 次元円板は、すべてメリディアン円板である。

さて、 $V$  を種数  $g > 0$  のハンドル体とし、 $\{D_1, D_2, \dots, D_g\}$  を  $V$  の完備メリディアン円板系とする。今、 $V$  内の 2 次元円板  $D$  で、次の三つの条件をみたすものがあるとする。

- (1)  $D \cap (D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g) = D \cap D_1 = \partial D \cap D_1$ 。
- (2)  $\partial D \cap D_1$  は  $D_1$  に適切に埋め込まれた 1 本の弧  $\alpha$ 。
- (3)  $\text{cl}(\partial D - \alpha) = \beta$  は  $\partial V$  内の一本の弧 (図 11.4)。

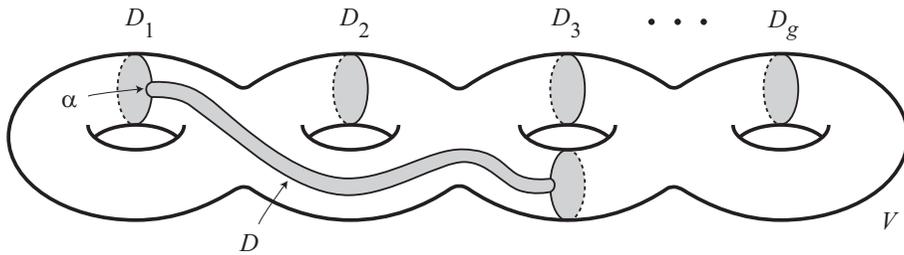


図 11.4

このとき、 $\alpha$  は  $D_1$  を二つの 2 次元円板  $D', D''$  に分けるので、 $D'_1 = D \cup D'$ 、 $D''_1 = D \cup D''$  とおくと、 $D'_1, D''_1$  はともに  $V$  に適切に埋め込まれた 2 次元円板となる。しかも  $D'_1 \cap \{D_2 \cup D_3 \cup \dots \cup D_g\} = \emptyset$ 、 $D''_1 \cap \{D_2 \cup D_3 \cup \dots \cup D_g\} = \emptyset$  である。

**補題 11.5** 上記の仮定のもとに、 $\{D'_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g\}$  と  $\{D''_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g\}$  のうちの少なくとも一方は、 $V$  の完備メリディアン円板系である。

**証明**  $\{D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g\}$  で  $V$  を切り開くと 3 次元球体となるので、 $\{D_2 \cup D_3 \cup \dots \cup D_g\}$  で  $V$  を切り開くと、トーラス体が得られる。それを  $W$  とおく。 $D_1$  は  $W$  のメリディアン円板であり、 $D'_1, D''_1$  はともに  $W$  に適切に埋め込まれた 2 次元円板である。ここで、 $D'_1, D''_1$  がともに非本質的であるとすると、 $D_1$  も非本質的となる (問題 11.1)。これは矛盾である。したがって、 $D'_1, D''_1$  のうち少なくとも一方は  $W$  のメリディアン円板であり、それで  $W$  を切り開くと 3 次元球体を得られる。すなわち、 $\{D'_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g\}$  と  $\{D''_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g\}$

のうち少なくとも一方は、 $V$  の完備メリディアン円板系である。 □

**問題 11.1** 補題 11.5 の証明において、 $D'_1, D'_1$  がともに非本質的ならば、 $D_1$  も非本質的となることを示せ (補題 11.2 の証明を参考にせよ)。

**補題 11.6**  $V$  を種数  $g > 0$  のハンドル体とし、 $\{D_1, D_2, \dots, D_g\}$  を  $V$  の完備メリディアン円板系とする。また、 $S$  を  $V$  内に適切に埋め込まれたコンパクトな境界のある曲面とする。ただし、 $S$  は 2 次元円板ではないとする。

このとき、 $S \cap (D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g) = \emptyset$  ならば、 $V$  の中に次の条件 (\*) をみたす 2 次元円板  $D$  が存在する。

(\*)  $D \cap S = \partial D$  であり、 $\partial D$  は  $S$  内の本質的単純閉曲線。

**証明**  $\{D_1, D_2, \dots, D_g\}$  で  $V$  を切り開いて得られる 3 次元球体を  $B$  とする。 $S \cap (D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g) = \emptyset$  なので、 $S$  は  $B$  に適切に埋め込まれた曲面であり、 $\partial S$  は  $\partial B$  上のいくつかの単純閉曲線である。そこで、そのような単純閉曲線のうち  $\partial B$  上最も内側のものを  $C$  とし、 $C$  を境界とし  $\partial S$  の他の連結成分を含まない  $\partial B$  上の 2 次元円板を  $\Delta$  とする。さらに  $\Delta$  を  $S$  に沿ってほんの少し  $B$  の内部に押し込んで得られる 2 次元円板を  $D$  とする。このとき、 $D$  は  $V$  内の 2 次元円板であり、 $D \cap S = \partial D$  である。しかも  $S$  が 2 次元円板でないことから、 $\partial D$  は  $S$  内の本質的単純閉曲線である。したがって、この  $D$  が求める 2 次元円板である。 □

### 11.3 ヒーガード分解と本質的球面

$M$  を向き付け可能閉 3 次元多様体とし、 $(V_1, V_2; F)$  を  $M$  の種数  $g$  のヒーガード分解とする。また、 $S$  を  $F$  に横断的に交わる  $M$  内の閉曲面とする。このとき、 $S \cap F$  はいくつかの単純閉曲線である。 $S_1 = S \cap V_1, S_2 = S \cap V_2$  とおくと、 $S_1, S_2$  はそれぞれ  $V_1, V_2$  に適切に埋め込まれた曲面である。

今、 $V_2$  内の 2 次元円板  $\Delta$  で、次の三つの条件をみたすものがあるとする。

- (1)  $\Delta \cap S_2 = \partial \Delta \cap S_2$ 。
- (2)  $\partial \Delta \cap S_2 = \alpha$  は  $S_2$  に適切に埋め込まれた 1 本の弧。
- (3)  $\text{cl}(\partial \Delta - \alpha) = \beta$  は  $F$  内の 1 本の弧。

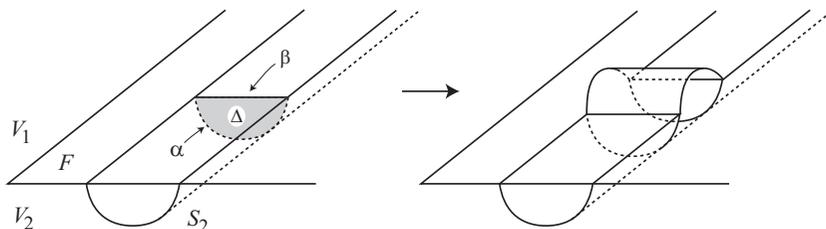


図 11.5

このとき図 11.5 のように、 $S_2$  における  $\alpha$  の近傍  $N(\alpha)$  を、 $\Delta$  に沿って  $V_1$  に押し込む

$M$  のアンビエントイソトピーを考えることができる。このアンビエントイソトピーをジェイコ ([12]) に従って、 $\alpha$  における  $\Delta$  に沿った A 型イソトピー\*, または単に A 型イソトピーという。

この A 型イソトピーによる  $S$  の像を  $S'$  とし、 $S'_1 = V_1 \cap S'$ ,  $S'_2 = V_2 \cap S'$  とおくと、 $S'_2$  は  $S_2$  を  $\alpha$  に沿って切り開いて得られる曲面  $\text{cl}(S_2 - N(\alpha))$  に同相であり、 $S'_1$  は  $S_1$  の境界を  $N(\alpha)$  でつないで得られる曲面  $S_1 \cup N(\alpha)$  に同相である。

以上の準備のもとに、ヒーガード種数の加法性を示すために必要な、ヒーガード分解と本質的球面との関係についての結果を示す。

**定理 11.7 ([Ha2], [12])**  $M$  を向き付け可能閉 3 次元多様体とし、 $(V_1, V_2)$  を  $M$  の種数  $g > 0$  のヒーガード分解とする。このとき、 $M$  が本質的 2 次元球面を含むならば、 $M$  内の本質的 2 次元球面で、 $V_1, V_2$  とそれぞれ一つの本質的 2 次元円板で交わるものが存在する。

**証明**  $S$  を  $M$  内の本質的 2 次元球面とする。まず、 $S \cap V_1$  の連結成分は、 $V_1$  における本質的 2 次元円板としてよいことを示す。そのために、 $V_1$  の  $g$  個のハンドルの中心線を  $g - 1$  本の弧で結んだ 1 次元複体で、 $V_1$  を  $M$  における正則近傍とするようなものを考え、それを  $\Gamma$  とする (図 11.6)。

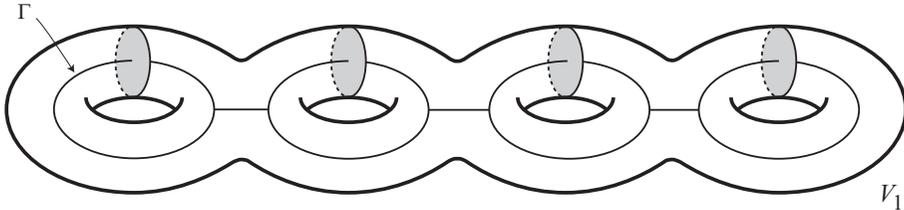


図 11.6

補題 11.3 よりハンドル体は既約多様体なので、 $S$  は  $V_1, V_2$  のうちの一方に含まれることはない。よって  $S$  は  $V_1$  と交わる。しかも  $V_1$  は  $\Gamma$  の正則近傍なので、 $S$  は  $\Gamma$  と交わる。さらに定理 2.15 より、 $\Gamma$  との交わりは有限個の点としてよい。ここで、 $N(\Gamma)$  を  $\Gamma$  の十分小さい正則近傍とすれば、 $S$  と  $N(\Gamma)$  との交わりは、 $N(\Gamma)$  に適切に埋め込まれた有限個の  $N(\Gamma)$  における本質的 2 次元円板とできる。また、 $\text{cl}(V_1 - N(\Gamma))$  は  $F \times I$  に同相なので、 $N(\Gamma)$  は  $M$  において  $V_1$  にアンビエントイソトピックである。よってそのアンビエントイソトピーによる  $S$  の像を考えることにより、 $S$  と  $V_1$  との交わりは、有限個の  $V_1$  における本質的 2 次元円板としてよいことが示された。ゆえに、その数を  $n$  とすると、

$$S \cap V_1 = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$$

(ただし、 $E_i$  は  $V_1$  内の本質的 2 次元円板 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ))

とおける。

\* 改訂版註：A 型イソトピーという呼称は、その後あまり使われず、 $\Delta$  に沿った境界圧縮と呼ばれることが多い。

$S_1 = S \cap V_1, S_2 = S \cap V_2$  とおく。 $S_1$  は上記の  $n$  個の 2 次元円板の集まりであり、 $S_2$  は  $S$  から  $n$  個の 2 次元円板の内部を取り除いた曲面である。

以上の準備のもとに、定理を  $n$  に関する数学的帰納法で示す。

$n = 1$  のとき。 $S_1 = E_1$  であり、 $S_2 = \text{cl}(S - E_1)$  は  $V_2$  内の一つの 2 次元円板である。 $S_2$  が  $V_2$  で非本質的とすると、 $\partial S_2$  は  $\partial V_2$  上のある 2 次元円板の境界となる。したがって  $\partial E_1$  も  $\partial V_1$  上のある 2 次元円板の境界となる。その 2 次元円板を  $E'$  とすると  $E_1 \cup E'$  は  $V_1$  内の 2 次元球面である。このとき補題 11.3 より、 $E_1 \cup E'$  は  $V_1$  内のある 3 次元球体の境界となり、 $E_1$  が  $V_1$  において本質的であることに矛盾する。すなわち、 $S_2$  も  $V_2$  において本質的であり、 $S$  が求める 2 次元球面である。

次に  $n > 1$  とし、 $M$  内の本質的 2 次元球面  $S'$  で、 $V_1$  または  $V_2$  との交わりが  $n - 1$  個までの本質的 2 次元円板となるものがあるとき、求める 2 次元球面が存在すると仮定する。

**副補題 11.8**  $\{D_1, D_2, \dots, D_g\}$  を  $V_2$  の完備メリディアン円板系とすると、 $S_2 \cap (D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g) \neq \emptyset$  としてよい。

**証明**  $S_2 \cap (D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g) = \emptyset$  とする。このとき補題 11.6 より  $V_2$  内の 2 次元円板  $D$  で  $D \cap S_2 = \partial D$  であり、 $\partial D$  は  $S_2$  内の本質的単純閉曲線となるものが存在する。このとき  $\partial D \subset S_2 \subset S$  より、 $\partial D$  は  $S$  内の単純閉曲線である。よって  $\partial D$  は  $S$  を二つの 2 次元円板に分ける。それらを  $Q_1, Q_2$  とおき、 $P_1 = D \cup Q_1, P_2 = D \cup Q_2$  とおくと、 $P_1, P_2$  はともに 2 次元球面である。このとき補題 11.2 より、 $P_1$  は  $M$  において本質的であるとしてよい。 $P_1, P_2$  と  $V_1$  との交わりは、どちらも  $V_1$  におけるいくつかの本質的 2 次元円板なので、それらの個数をそれぞれ  $n_1, n_2$  とする。 $n_1 + n_2 = n$  であり、 $\partial D$  が  $S_2$  における本質的単純閉曲線であることから、 $n_1 > 0, n_2 > 0$  である。よって  $1 \leq n_1 < n$  より帰納法の仮定から求める 2 次元球面が存在する。したがってこれ以降は、 $S_2 \cap (D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g) \neq \emptyset$  という場合のみを考えればよい。□

さて、 $\{D_1, D_2, \dots, D_g\}$  を  $V_2$  の完備メリディアン円板系とし、 $\mathcal{D} = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g$  とおく。定理 2.14 から  $S_2 \cap \mathcal{D}$  の連結成分は、すべて  $\mathcal{D}$  に適切に埋め込まれた弧または単純閉曲線としてよい。

**副補題 11.9**  $S_2 \cap \mathcal{D}$  の連結成分は、すべて弧としてよい。

**証明**  $S_2 \cap \mathcal{D}$  の連結成分で、単純閉曲線であるものがあつたとする。それはある  $D_i$  に含まれているので、 $D_i$  内のある 2 次元円板の境界となる。その 2 次元円板の中に  $S_2 \cap D_i$  の他の連結成分があればそれらはすべて単純閉曲線なので、さらに内側のものを採用することにより、 $D_i$  内の 2 次元円板  $D$  で  $S_2 \cap \mathcal{D} = \partial D$  となるものが存在する (図 11.7(1))。

ここで副補題 11.8 と同様の議論により、 $\partial D$  は  $S_2$  において非本質的であるとしてよいので、 $\partial D$  は  $S_2$  内のある 2 次元円板  $D'$  の境界となる。よって  $D \cup D'$  は  $V_2$  内の 2 次元球面である。このとき補題 11.3 より  $D \cup D'$  は  $V_2$  内のある 3 次元球体  $B$  の境界となる。よって命題 10.4 の証明の  $n > 0$  の場合と同様に、 $B$  に沿った  $M$  のアンビエントイソトピーで、 $D'$  を  $D$  に重ね合わせ、さらに、重ね合わせた  $D'$  を  $D_i$  から少しずつずらすことにより、 $S$  を

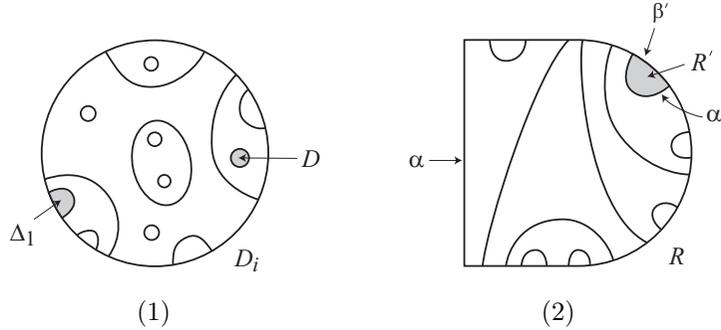


図 11.7

アンビエントイソトピーで動かして、 $S_2 \cap D$  の連結成分の個数を少なくとも一つ減らすことができる。この操作を続けることにより  $S_2 \cap D$  の連結成分はすべて弧とできる。 □

**副補題 11.10**  $S_2 \cap D$  の連結成分は、すべて  $S_2$  において本質的としてよい。

**証明**  $S_2 \cap D$  の連結成分で  $S_2$  において非本質的なものがあったとし、それを  $\alpha$  とする。このとき  $S_2$  内の 2 次元円板  $R$  で、 $\partial R = \alpha \cup \beta$  (ただし  $\beta$  は  $\partial S_2$  内の弧) となるものがある。ここで  $R \cap D = \alpha$  とは限らないので、 $R \cap D$  の連結成分  $\alpha'$  で、 $\partial R' = \alpha' \cup \beta'$ 、 $R' \cap D = \alpha'$  をみたく  $R$  内の 2 次元円板  $R'$  が存在するものを考える (図 11.7(2))。この  $\alpha'$  を  $R$  上最も外側の弧という ( $\alpha = \alpha'$ ,  $R = R'$  の可能性もある)。このとき  $\alpha'$  はある  $D_i$  内に適切に埋め込まれた弧なので、 $D_i$  を二つの 2 次元円板  $\Delta', \Delta''$  に分ける。よって  $D'_i = R' \cup \Delta'$ ,  $D''_i = R' \cup \Delta''$  とおくと、補題 11.5 より  $(D - \{D_i\}) \cup \{D'_i\} = \{D_1, \dots, D'_i, \dots, D_g\}$  は  $V_2$  の完備メリディアン円板系としてよい。ゆえに、 $D'_i$  における  $R'$  の部分を少しずらして、 $S_2$  から離れたものを改めて  $D'_i$  とおき、 $D' = (D - \{D_i\}) \cup \{D'_i\}$  とおくと、 $S_2 \cap D'$  の連結成分の数は、 $S_2 \cap D$  から  $\alpha'$  を取り除いたことにより、少なくとも一つは減少している。この操作を続けることにより、 $V_2$  の完備メリディアン円板系で  $S_2$  との交わりが、すべて  $S_2$  における本質的な弧となるものを見つけることができる。 □

さて、副補題 11.8 より  $S_2 \cap D \neq \emptyset$  なので、ある  $D_i$  に対して  $S_2 \cap D_i \neq \emptyset$  である。副補題 11.9 より  $S_2 \cap D_i$  の連結成分はすべて  $D_i$  に適切に埋め込まれた弧なので、それらのうち  $D_i$  において最も外側にあるものを一つ考え、それを  $\alpha_1$  とする。すなわち、 $D_i$  内の 2 次元円板  $\Delta_1$  で  $S_2 \cap \Delta_1 = \alpha_1$  であり、 $\partial \Delta_1 = \alpha_1 \cup \beta_1$  (ただし  $\beta_1$  は  $\partial D_i$  内の弧) をみたくものがある (図 11.7(1))。

そこで、この  $\Delta_1$  に沿った A 型イソトピーを実行しよう。 $S = S^{(1)}$ ,  $S_1 = S_1^{(1)}$ ,  $S_2 = S_2^{(1)}$  とおき、このアンビエントイソトピーによって  $S^{(1)}$  が動いた先を  $S^{(2)}$  とおく。また、 $S^{(2)} \cap V_1 = S_1^{(2)}$ ,  $S^{(2)} \cap V_2 = S_2^{(2)}$  とおく。このアンビエントイソトピーで動く部分は  $\Delta_1$  の  $M$  における近傍だけであり、その定義から  $S_2^{(2)}$  は  $S_2 = S_2^{(1)}$  を  $\alpha_1$  に沿って切り開いて得られる曲面である。

ここで  $S_2^{(2)}$  の連結成分がすべて 2 次元円板ならば、この操作は終了する。 $S_2^{(2)}$  が 2 次元円板以外の連結成分をもつならば、 $S_2^{(2)} \cap D \neq \emptyset$  であり、その連結成分はすべて  $S_2^{(2)}$  に適切に埋め込まれた弧である。よって、ある  $D_j$  において  $S_2^{(2)} \cap D_j \neq \emptyset$  とし、 $S_2^{(2)} \cap D_j$  の連結成分のうち  $D_j$  において最も外側にある弧を  $\alpha_2$  とし、 $\alpha_2$  が  $D_j$  から切りとる 2 次元円板で  $S_2^{(2)} \cap D_j$  の他の連結成分と交わらないものを  $\Delta_2$  とする。 $\alpha_2$  が  $S_2^{(2)}$  において非本質的ならば、副補題 11.10 と同様の議論によって完備メリディアン円板系と  $\alpha_2$  を取りかえることにより、 $\alpha_2$  は  $S_2^{(2)}$  で本質的としてよい。よって  $\Delta_2$  に沿った A 型イソトピーを実行する。また、このアンビエントイソトピーによって  $S^{(2)}$  が動いた先を  $S^{(3)}$  とし、 $S^{(3)} \cap V_1 = S_1^{(3)}$ 、 $S^{(3)} \cap V_2 = S_2^{(3)}$  とおく。このとき、 $S_2^{(3)}$  は  $S_2^{(2)}$  を  $\alpha_2$  に沿って切り開いて得られる曲面である。

このようにして、必要ならば各段階で完備メリディアン円板系を取りかえて考えることにより、 $V_2$  に適切に埋め込まれた曲面と、その曲面に適切に埋め込まれた本質的な弧の列  $(S_2^{(1)}, \alpha_1), (S_2^{(2)}, \alpha_2), \dots, (S_2^{(m)}, \alpha_m)$  ができる。しかもこの操作は  $S_2^{(i)}$  の連結成分がすべて 2 次元円板になるまで続けることができるので、 $S_2^{(m+1)}$  の連結成分はすべて 2 次元円板としてよい。これは  $S_2$  の階層であり、 $S_2^{(i)}$  を  $\alpha_i$  で切り開く操作が、A 型イソトピーという  $M$  のアンビエントイソトピーで実現されている。

さて、これらのアンビエントイソトピーの列によって  $S$  が動いた先である  $S^{(m+1)}$  に注目しよう。 $S^{(m+1)}$  は  $S$  のアンビエントイソトピーの像であるから、 $M$  内の本質的 2 次元球面である。しかも  $S^{(m+1)} \cap V_2 = S_2^{(m+1)}$  より、 $V_2$  との交わりの連結成分は、すべて  $V_2$  における本質的 2 次元円板である。よってその数を  $n'$  とすると、補題 11.1 より、 $n' < n$  である。このとき、帰納法の仮定より求める 2 次元球面が存在する。すなわち、数学的帰納法により定理 11.7 は証明された。  $\square$

**系 11.11**  $M$  を素でない向き付け可能閉 3 次元多様体 (ただし  $S^3$  を除く) とし、 $(V_1, V_2)$  をそのヒーガード分解とする。このとき  $M$  内の本質的分離的 2 次元球面で、 $V_1, V_2$  とそれぞれ一つの本質的分離的 2 次元円板で交わるものが存在する。

**証明**  $M$  は素ではなく  $S^3$  でもないので、 $M$  の連結和分解を与える、本質的分離的 2 次元球面が存在する。このとき定理 11.7 より  $M$  内の本質的 2 次元球面  $S$  で、 $S \cap V_1, S \cap V_2$  がそれぞれ  $V_1, V_2$  内の一つの本質的 2 次元円板であるようなものが存在する。

$S$  が分離的ならば、 $S \cap V_1, S \cap V_2$  も  $V_1, V_2$  において分離的なので (問題 11.2)、これが求める 2 次元球面である。

$S$  が分離的でないとき。問題 11.2 より  $S \cap V_1, S \cap V_2$  も  $V_1, V_2$  において分離的でないので、 $\partial V_1$  上の単純閉曲線で  $S \cap V_1$  と 1 点で交わるものが存在し、それを  $\alpha$  とする。このとき  $\alpha$  は  $S \cap V_2$  と 1 点で交わる  $\partial V_2$  上の単純閉曲線でもある。 $\alpha$  は  $S$  と 1 点で交わる  $M$  内の単純閉曲線なので、 $N(S \cup \alpha)$  を  $S \cup \alpha$  の  $M$  における正則近傍とし、 $S' = \partial N(S \cup \alpha)$  とおくと、 $S'$  は  $M$  内の 2 次元球面である。

ここで  $S'$  が非本質的とすると、 $S'$  を境界とするような  $M$  内の 3 次元球体が存在する。それを  $B$  とすると、 $M = N(S \cup \alpha) \cup B$  であり、補題 10.6 と同様に  $M \cong S^2 \times S^1$  であ

る。このとき命題 10.5 より  $M$  は素となり、仮定に矛盾する。よって  $S'$  は  $M$  内で本質的である。しかも、 $N(S \cup \alpha)$  は  $N(S \cup \alpha) \cap V_1, N(S \cup \alpha) \cap V_2$  がそれぞれ  $V_1, V_2$  における  $(S \cap V_1) \cup \alpha, (S \cap V_2) \cup \alpha$  の正則近傍であるようにとれるので (図 11.8),  $S' \cap V_1, S' \cap V_2$  はそれぞれ  $V_1, V_2$  内の本質的分離的 2 次元円板となる。よって、この  $S'$  が求める 2 次元球面である。  $\square$

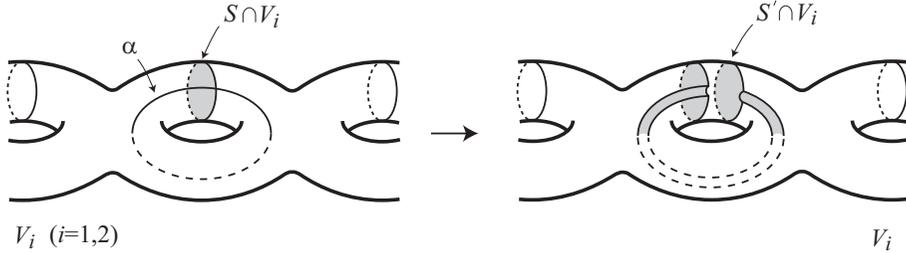


図 11.8

**問題 11.2** 系 11.11 の証明において、 $S$  が分離的であることと、 $S \cap V_1, S \cap V_2$  が  $V_1, V_2$  においてどちらも分離的であることが、同値であることを示せ。

**系 11.12**  $M$  を向き付け可能閉 3 次元多様体とする。 $g(M) = 1$  ならば、 $M$  は素である。

**証明**  $g(M) = 1$  より、 $M$  は種数 1 のヒーガード分解  $(V_1, V_2)$  をもつ。ここで、 $V_1, V_2$  はともにトーラス体である。また  $g(M) = 1$  より  $M$  は  $S^3$  ではない。 $M$  が素でないとする、系 11.11 より  $M$  内の本質的分離的 2 次元球面で、 $V_1, V_2$  とそれぞれ一つの本質的分離的 2 次元円板で交わるものが存在する。

一方、補題 11.4 より、トーラス体内の本質的 2 次元円板は、すべて非分離的である。これは矛盾である。よって  $M$  は素である。  $\square$

**系 11.13** レンズ空間 (ただし  $S^2 \times S^1$  は除く) は、既約 3 次元多様体である。

**証明**  $L$  を  $(S^2 \times S^1$  ではない) レンズ空間とする。 $L$  が  $S^3$  ならば、命題 10.3 より既約である。 $L$  が  $S^3$  でないならば、 $g(L) = 1$  なので、系 11.2 より  $L$  は素である。ここで仮定より  $L$  は  $S^2 \times S^1$  ではないので、命題 10.7(2) より既約である。  $\square$

### 11.4 ヒーガード種数の加法性

本節において前節までの準備のもとに、定理 10.8 の証明とヒーガード種数の加法性の証明を行う。

**定理 10.8 の証明**  $g(M) = g$  とおき、 $(V_1, V_2)$  を  $M$  の種数  $g$  のヒーガード分解とする。 $M$  は  $S^3$  ではないので、 $g > 0$  である。定理を  $g$  についての数学的帰納法で証明する。

$g = 1$  のとき。系 11.12 より  $M$  は素なので、定理の結論が成り立つ。

$g > 1$  とし、 $g > g' \geq 1$  であるような  $g'$  に対しては定理の結論が成り立つと仮定する。

$M$  が素ならば定理の結論は成り立つので、 $M$  は素でないとする。このとき、系 11.11 より  $M$  内の本質的分離的 2 次元球面  $S$  で、 $S \cap V_1 = D_1, S \cap V_2 = D_2$  は、それぞれ  $V_1, V_2$  内の一つの本質的分離的 2 次元円板となるものが存在する。 $V_1$  を  $D_1$  で切り開いて得られるハンドル体を  $U_1, W_1$  とし、 $V_2$  を  $D_2$  で切り開いて得られるハンドル体を  $U_2, W_2$  とする。 $\partial D_1 = \partial D_2$  より、 $M$  において  $U_1 \cap \partial V_1 = U_2 \cap \partial V_2, W_1 \cap \partial V_1 = W_2 \cap \partial V_2$  としてよい。 $U_1, W_1$  の種数をそれぞれ  $g_1, g_2$  とすると、 $g_1 + g_2 = g$  であり、 $D_1$  が  $V_1$  において本質的であることから、 $0 < g_1 < g, 0 < g_2 < g$  である。 $M'_1 = U_1 \cup U_2, M'_2 = W_1 \cup W_2$  とおくと、 $M = M'_1 \cup M'_2$  であり、 $M'_1 \cap M'_2 = \partial M'_1 = \partial M'_2 = S$  である (図 11.9)。

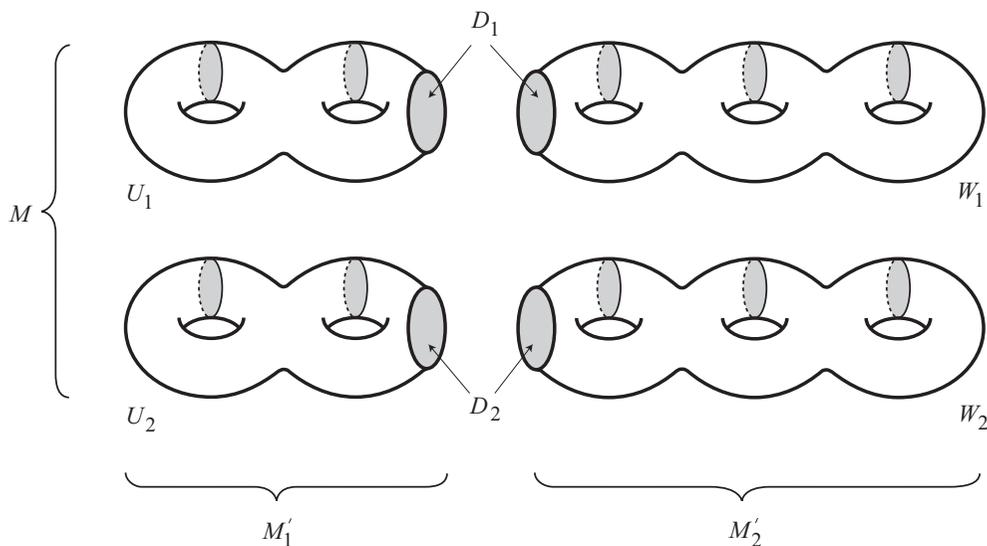


図 11.9

ここで、 $B_1, B_2$  を二つの 3 次元球体とし、 $M'_1, M'_2$  の境界にそれぞれ  $B_1, B_2$  を貼り合わせて得られる閉 3 次元多様体を  $M_1, M_2$  とすると、 $M = M_1 \# M_2$  である。また、 $M'_1 = U_1 \cup U_2, M'_2 = W_1 \cup W_2$  という分解は、それぞれ  $M_1, M_2$  の種数  $g_1, g_2$  のヒーガード分解へと拡張する。よって  $0 < g(M_1) < g, 0 < g(M_2) < g$  より、帰納法の仮定から、 $M_1, M_2$  はそれぞれ有限個の素な多様体の連結和に分解される。したがって、 $M$  は有限個の素な多様体の連結和に分解され、数学的帰納法により定理の証明が終わる。□

これよりヒーガード種数の加法性の証明を行うが、図 11.9 をヒントに、次を示せ。

**問題 11.3**  $L_1, L_2$  を向き付け可能閉 3 次元多様体とし、 $M = L_1 \# L_2$  とおく。このとき、 $g(M) \leq g(L_1) + g(L_2)$  が成り立つ。

**定理 11.14**  $M$  を  $S^3$  でない向き付け可能閉 3 次元多様体とし、 $M = M_1 \# M_2 \# \dots \# M_m$  を素な多様体への連結和分解とする。このとき次が成り立つ。

$$g(M) = g(M_1) + g(M_2) + \dots + g(M_m)$$

**証明**  $m$  についての数学的帰納法で示す。

$m = 1$  のとき、 $M = M_1$  より  $g(M) = g(M_1)$  となって、定理の等式は成り立つ。

次に  $m > 1$  とし、 $m > m' \geq 1$  である  $m'$  に対しては、定理の等式が成り立つと仮定する。

$m > 1$  より  $M$  は素ではないので、系 11.11 における 2次元球面が存在する。このとき、定理 10.8 の証明と同様にして、二つの  $S^3$  でない閉 3次元多様体  $L_1, L_2$  によって  $M \cong L_1 \# L_2$  となる。ただし  $L_1, L_2$  は、それぞれ  $0 < g_1 < g(M)$ ,  $0 < g_2 < g(M)$ ,  $g_1 + g_2 = g(M)$  であるような、種数が  $g_1, g_2$  のヒーガード分解をもつ。さらにヒーガード種数の定義より、 $g(L_1) \leq g_1$ ,  $g(L_2) \leq g_2$  なので、 $g(L_1) + g(L_2) \leq g(M)$  となる。一方、問題 11.3 より  $g(M) \leq g(L_1) + g(L_2)$  が成り立つので、これらを合わせて、 $g(M) = g(L_1) + g(L_2)$  を得る。ここで、補題 10.10 より、ある  $r$  に対して  $L_1 \cong M_1 \# \cdots \# M_r$ ,  $L_2 \cong M_{r+1} \# \cdots \# M_m$  としてよいので。帰納法の仮定から、

$$g(L_1) = g(M_1) + \cdots + g(M_r), \quad g(L_2) = g(M_{r+1}) + \cdots + g(M_m)$$

が成り立つ。ゆえに、

$$g(M) = g(L_1) + g(L_2) = g(M_1) + \cdots + g(M_r) + g(M_{r+1}) + \cdots + g(M_m)$$

より、定理の証明が終わる。  $\square$

**定理 11.15** (ヒーガード種数の加法性 [Ha2], [12])  $M_1, M_2$  を二つの向き付け可能閉 3次元多様体とする。このとき次が成り立つ。

$$g(M_1 \# M_2) = g(M_1) + g(M_2)$$

**証明**  $M_1$  または  $M_2$  が  $S^3$  のときは  $g(S^3) = 0$  より等式が成り立つ。

$M_1, M_2$  がいずれも  $S^3$  でないとき。定理 10.8 より  $M_1, M_2$  はともに有限個の素な多様体への連結和分解  $M_1 \cong L_1 \# \cdots \# L_s$ ,  $M_2 \cong N_1 \# \cdots \# N_t$  をもつ。このとき、定理 11.14 より、

$$g(M_1) = g(L_1) + \cdots + g(L_s), \quad g(M_2) = g(N_1) + \cdots + g(N_t)$$

が成り立つ。また、 $M_1 \# M_2 \cong L_1 \# \cdots \# L_s \# N_1 \# \cdots \# N_t$  も素な多様体への連結和分解なので、再び定理 11.14 より、

$$\begin{aligned} g(M_1 \# M_2) &= g(L_1) + \cdots + g(L_s) + g(N_1) + \cdots + g(N_t) \\ &= g(M_1) + g(M_2) \end{aligned}$$

が成り立ち、定理の証明が終わる。  $\square$

ヒーガード種数の加法性より次が成り立つ。

**系 11.16**  $M$  を向き付け可能閉 3次元多様体とする。 $M$  が種数  $g$  のヒーガード分解をもつならば、 $M$  を連結和分解したときの分解成分の個数は  $g$  以下である。

## 第12章

# デーンの補題, ループ定理, 球面定理

本章において, パパキリヤコプーロス ([Pal], [Pa2]) によって証明された, 三つの結果を紹介する。これらの結果は, 代数的な条件から幾何的な結論を導くものであり, 11章で紹介した“切り貼り技法”とよばれる手法を, 代数的な仮定のもとで実行可能にする, 強力な道具でもある。はじめの結果にデーンの補題という名前がついているのは, デーンが1910年にそのことを示したが ([D]), その後その証明が不十分であることがわかり, パパキリヤコプーロス ([Pa1]) と, 本間 ([Hm]) によって完全な証明が与えられたことに由来する。またそれ以降, 多くの人々によって改良がなされている ([Ep1], [St])。

### 12.1 デーンの補題とループ定理

**定理 12.1 (デーンの補題)**  $M$  を 3次元多様体,  $D$  を 2次元円板とする。  $f: D \rightarrow M$  を連続写像とし,  $\partial D$  の  $D$  における正則近傍 (アニュラス)  $N$  で,  $f|_N: N \rightarrow M$  は埋め込みであり,  $f^{-1}(f(N)) = N$  をみたすものがあるとす。このとき,  $M$  内の 2次元円板  $D_0$  で,  $\partial D_0 = f(\partial D)$  となるものが存在する。

**定理 12.2 (ループ定理)**  $M$  を境界のある 3次元多様体とし,  $F$  を  $\partial M$  に含まれる曲面とする。また  $i_*: \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$  を包含写像  $i: F \rightarrow M$  から導かれる準同形写像とし,  $N$  を  $\pi_1(F)$  のある正規部分群とする。このとき,  $\text{Ker } i_* - N \neq \emptyset$  ならば,  $M$  に適切に埋め込まれた 2次元円板  $D_0$  で,  $\partial D_0 \subset F$  であり,  $[\partial D_0] \notin N$  となるものが存在する。ここで  $[\partial D_0]$  は,  $\partial D_0$  を代表元とする  $\pi_1(F)$  の元である。

**系 12.3 (ループ定理)**  $M, F, i_*$  を定理 12.2 における記号とする。  $i_*$  が単射でないならば,  $M$  に適切に埋め込まれた 2次元円板  $D_0$  で,  $\partial D_0 \subset F$  であり,  $\partial D_0$  が  $F$  における本質的単純閉曲線となるものが存在する。

上記の定理と系は, いずれもある条件のもとで 2次元円板が存在するというものであるが, 実は, デーンの補題はループ定理の系として導くことができる。以下にそれを示す。

**系 12.3 を用いた定理 12.1 の証明**  $f|_N: N \rightarrow M$  は埋め込みなので,  $f(\partial D)$  は  $M$  内の単純閉曲線である。  $V$  を  $f(\partial D)$  の  $M$  における正則近傍で,  $V \cap f(D) = V \cap f(N)$  であり,  $V \cap f(N)$  が  $f(\partial D)$  の  $f(N)$  における正則近傍となるものとする ( $V$  を十分小さくすれば,  $f^{-1}(f(N)) = N$  よりこの条件はみたされる)。  $M' = \text{cl}(M - V)$  とおき  $\partial V = T$  と

おく。  $V$  はトーラス体かまたはクラインの壺体であるが,  $f(\partial D)$  が  $M$  において 1 点にホモトピックなので, トーラス体である。したがって  $T$  はトーラスである。また  $f(N) \cap T = C$  とおく。  $C$  は  $T$  内の単純閉曲線なので,  $C$  の  $T$  における正則近傍を  $F$  とおくと,  $F$  はアニュラスであり,  $\partial M'$  に含まれる曲面である。このとき  $[C]$  は  $\pi_1(F)$  の生成元であるが,  $\pi_1(M')$  においては単位元となるので,  $i_* : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M')$  は単射ではない。したがって, 系 12.3 より  $M'$  に適切に埋め込まれた 2 次元円板  $D'$  で,  $\partial D' \subset F$  であり,  $\partial D'$  は  $F$  における本質的単純閉曲線となるものが存在する。ここで,  $\partial D'$  がアニュラス  $F$  内の本質的単純閉曲線であることに注意すると,  $D'$  を  $M'$  のアンビエントイソトピーで動かして,  $M'$  に適切に埋め込まれた 2 次元円板  $D''$  で,  $\partial D'' = C$  となるものが得られる (問題 12.1)。よって  $D_0 = D'' \cup (V \cap f(N))$  とおくと, この  $D_0$  が求める 2 次元円板である。  $\square$

**問題 12.1** 上記の証明において,  $D'$  から  $\partial D'' = C$  となる 2 次元円板  $D''$  が得られることを示せ。

ループ定理の証明は 12.5 節で行うが, その証明は [11] に従っている。また次節で紹介する球面定理の証明は省略するが, やはり [11] 等を参照されたい。

## 12.2 球面定理とポアンカレ予想

**定理 12.4 (球面定理)**  $M$  を向き付け可能 3 次元多様体とする。  $M$  の 2 次元ホモトピー群  $\pi_2(M)$  が自明な群でないならば,  $M$  は本質的 2 次元球面を含む。

これが球面定理であるが, ループ定理は 3 次元多様体が向き付け可能とは限らなかったのに対して, 球面定理の場合は向き付け可能としている。向き付け不可能な 3 次元多様体を含めた場合は, 次のように拡張される。これを射影平面定理とよぶ ([Ep1])。

**定理 12.5 (射影平面定理)**  $M$  を 3 次元多様体とする。  $\pi_2(M)$  が自明な群でないならば,  $M$  は本質的 2 次元球面かまたは両側射影平面を含む。

ループ定理と球面定理はともに, 代数的な条件から幾何的な結論を導くという形をしている。このように, 代数的な条件からどのような幾何的結論が得られるか, ということは, 3 次元多様体論においてしばしば問題となるところである。そしてその中で最も有名なものが, 次に紹介するポアンカレ予想である。

**ポアンカレ予想**  $M$  を閉 3 次元多様体とする。  $\pi_1(M)$  が自明な群ならば,  $M$  は  $S^3$  に同相であろう。

ポアンカレは 1900 年の論文 [Po1] において, 閉 3 次元多様体  $M$  の 1 次元ホモロジー群が自明な群ならば, それは  $S^3$  に同相であると述べた。しかし 1904 年の論文 [Po2] においてその反例をあげ, さらに  $M$  の基本群が自明な群ならば  $S^3$  に同相であろうか, と問いかけた。これが後にポアンカレ予想として伝えられることになる。しかしこの予想は, その後

の多くのトポロジストの努力にも関わらず, 未解決の大問題として, 3次元多様体論の中に君臨し続けている。<sup>†</sup>

ここで再び球面定理を思い出そう。対偶を考えると次が成り立つ。

**系 12.6**  $M$  を向き付け可能 3次元多様体とする。 $M$  が既約ならば  $\pi_2(M)$  は自明な群である。

この系を見ると, その逆の主張 “ $\pi_2(M)$  が自明な群ならば  $M$  は既約である” も正しいのではないかという気持ちがするのではなからうか。実はこの主張が正しいならばポアンカレ予想も正しいということがいえる。このポアンカレ予想をめぐる様々な話題や歴史的経過については, [10] に詳しく述べられている。

### 12.3 トーラス体定理

ループ定理の応用として, トーラス体定理とよばれる結果を紹介する。そのために, 基本群についての補題を一つ準備する。

$G_1, G_2$  を二つの群とする。また  $G_0$  をある群とし, 二つの単射準同形  $\varphi_1 : G_0 \rightarrow G_1$ ,  $\varphi_2 : G_0 \rightarrow G_2$  が存在するとする。このとき,  $G_1$  と  $G_2$  の自由積に  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$  (ただし  $x \in G_0$ ) という関係を入れて得られる群を,  $G_0$  による  $G_1$  と  $G_2$  の融合自由積といい,  $G = G_1 *_{G_0} G_2$  と書く。すなわち,  $G_0$  を  $G_1$  と  $G_2$  の共通の部分群とみなして, そのところで  $G_1$  と  $G_2$  をくっつけるわけである。このとき  $G$  の作り方から,  $G_1, G_2$  はともに  $G$  の部分群となる。

ここで 7.2 節の記号を思い出そう。 $K, K_0, K_1, K_2$  を  $K = K_1 \cup K_2$ ,  $K_1 \cap K_2 = K_0$  であるような連結な単体的複体とし,  $i_{1*} : \pi_1(K_0, a) \rightarrow \pi_1(K_1, a)$ ,  $i_{2*} : \pi_1(K_0, a) \rightarrow \pi_1(K_2, a)$  を, 包含写像から導かれる準同形とする。このとき定理 7.1 と上に述べたことから, 次が成り立つ。

**補題 12.7**  $i_{1*}, i_{2*}$  がともに単射ならば,  $\pi_1(K, a)$  は  $\pi_1(K_0, a)$  による  $\pi_1(K_1, a)$  と  $\pi_1(K_2, a)$  の融合自由積である。またこのとき,  $\pi_1(K, a)$  は  $\pi_1(K_1, a)$  と  $\pi_1(K_2, a)$  を部分群として含む。

ここで図 12.1 を見よう。図 12.1 の三つの図は, いずれも  $S^3$  に埋め込まれたトーラスである。それらはすべて  $S^3$  を二つの部分  $X, Y$  に分けているが, (1) は  $X, Y$  ともにトーラス体, (2) は  $X$  はトーラス体であるが,  $Y$  はトーラス体ではない。(3) は  $Y$  はトーラス体であるが,  $X$  はトーラス体ではない。このようにトーラスの  $S^3$  への入り方はいろいろあるが, 図 12.1 の三つの図はすべて,  $X, Y$  のうち少なくとも一方はトーラス体になっている。そしてこのことが常に成り立つというのが, トーラス体定理である。

<sup>†</sup> 改訂版註: 本書初版の出版の後, ポアンカレ予想はロシアの数学者ペレルマンによって解決された。このことについては, あとがきで述べる。

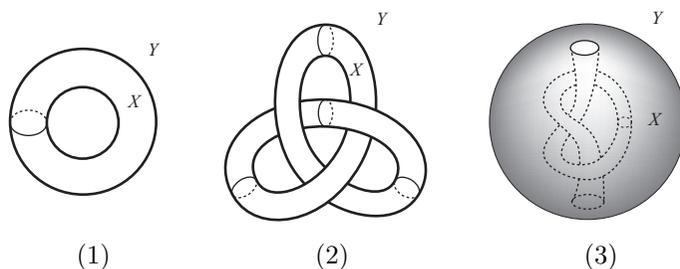


図 12.1

**定理 12.8** (トーラス体定理)  $T$  を  $S^3$  に埋め込まれたトーラスとする。このとき  $T$  は  $S^3$  を二つの部分に分け、それらのうちの少なくとも一方はトーラス体である。

**証明** 命題 5.3 より  $T$  は  $S^3$  において両側曲面である。また、この証明のあとで示す補題 12.9 より、 $T$  は  $S^3$  を二つの部分に分ける。よって  $S^3 - T$  の二つの連結成分の  $S^3$  におけるそれぞれの閉包を  $X, Y$  とすると、 $S^3 = X \cup Y$ ,  $X \cap Y = \partial X = \partial Y = T$  である。

$i_{1*} : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(X)$ ,  $i_{2*} : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(Y)$  を、それぞれ包含写像  $i_1 : T \rightarrow X$ ,  $i_2 : T \rightarrow Y$  から導かれる準同形とする。 $i_{1*}, i_{2*}$  がともに単射とすると、補題 12.7 から  $\pi_1(S^3)$  は  $\pi_1(T) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  を部分群として含む。これは  $\pi_1(S^3)$  が自明な群であることに矛盾する。したがって  $i_{1*}, i_{2*}$  のうち少なくとも一方は単射ではないので、 $i_{1*}$  が単射ではないとしてよい。このとき系 12.3 から、 $X$  に適切に埋め込まれた 2 次元円板  $D$  で、 $\partial D$  が  $T$  における本質的単純閉曲線となるものが存在する。補題 5.2 より  $D$  は  $X$  において両側曲面なので、 $D$  の  $X$  における正則近傍  $N$  で、 $N \cong D \times [-1, 1]$ ,  $N \cap T = \partial D \times [-1, 1]$ ,  $D = D \times \{0\}$  となるものが存在する。

$X' = \text{cl}(X - N)$  とおく。このとき、 $\partial X' = (T - \partial D \times [-1, 1]) \cup (D \times \{-1\} \cup D \times \{1\})$  は 2 次元球面であり、 $S^3$  に含まれるので、定理 2.8 より  $X'$  は 3 次元球体である。しかも、 $X = X' \cup N$  であり、 $X' \cap N = \partial X' \cap \partial N = D \times \{-1\} \cup D \times \{1\}$  なので、4.3 節におけるハンドル体の定義を思い出せば、 $X$  は種数 1 のハンドル体である。よって  $X$  はトーラス体である。  $\square$

**補題 12.9**  $F$  を  $S^3$  に埋め込まれた向き付け可能閉曲面とする。このとき  $F$  は  $S^3$  を二つの部分に分ける。

**証明** 命題 5.3 より  $F$  は  $S^3$  において両側曲面なので、 $F$  の正則近傍  $N$  で、 $N \cong F \times [-1, 1]$ ,  $F = F \times \{0\}$  となるものが存在する。 $a$  を  $F$  内のある点とし、 $\alpha_1 = \{a\} \times [-1, 1]$  とおく。 $\alpha_1$  は  $N$  に適切に埋め込まれた弧である。また、 $X = \text{cl}(S^3 - N)$  とおく。

今、 $F$  が  $S^3$  を二つに分けないとする。このとき  $X$  は連結であり、 $\partial X = F \times \{-1\} \cup F \times \{1\}$  なので、 $(a, -1) \in F \times \{-1\}$  と  $(a, 1) \in F \times \{1\}$  を  $X$  において結ぶ弧が存在する。よってそれを  $\alpha_2$  とおき、 $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$  とおくと、 $\alpha$  は  $F$  と 1 点で横断的に交わる  $S^3$  内の単純閉曲線である。

ここで  $S^1$  を、 $[-1, 1]$  において  $\{1\}$  と  $\{-1\}$  を同一視したものとみなし、 $S^3$  から  $S^1$

への連続写像  $f : S^3 \rightarrow S^1$  を,  $f(X) = \{1\} = \{-1\}$ ,  $f(F \times [-1, 1]) = [-1, 1]$  と定める。このとき,  $f|_\alpha : \alpha \rightarrow S^1$  は,  $f(\alpha_1) = [-1, 1]$ ,  $f(\alpha_2) = \{1\} = \{-1\}$  である。よって  $(f|_\alpha)_* : H_1(\alpha; \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(S^1; \mathbf{Z})$  は同形となり,  $f_* : H_1(S^3; \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(S^1; \mathbf{Z})$  は上への準同形となる。

ところが,  $H_1(S^3; \mathbf{Z}) \cong \{0\}$  であり  $H_1(S^1; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$  なのでこれは矛盾である。すなわち  $F$  は  $S^3$  を二つに分ける。  $\square$

## 12.4 2重曲線に沿った切り貼り

本節では, 次節で行うループ定理の証明で用いるいくつかの補題を示す。

まず, 2.4 節における記号と, 定理 2.16 を思い出そう。 $G$  をコンパクトな曲面,  $M$  を 3 次元多様体とし,  $f : (G, \partial G) \rightarrow (M, \partial M)$  を一般の位置写像とする。したがって  $S(f) = S_1(f) \cup S_2(f) \cup S_3(f)$  である。ここで,

$$\Sigma(f) = f(S(f)), \quad \Sigma_1(f) = f(S_1(f)), \quad \Sigma_2(f) = f(S_2(f)), \quad \Sigma_3(f) = f(S_3(f))$$

とおく。

**補題 12.10**  $f : (G, \partial G) \rightarrow (M, \partial M)$  が, さらに  $\Sigma_1(f) = \Sigma_3(f) = \emptyset$  をみたすとする。このとき,  $\Sigma_2(f)$  の連結成分は, 弧または単純閉曲線である。したがって  $S_2(f)$  の連結成分は,  $G$  に適切に埋め込まれた弧または単純閉曲線である。

**証明**  $y$  を  $\Sigma_2(f)$  の任意の点とする。 $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2\}$  とおけるので,  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) の  $G$  における正則近傍 (2次元円板)  $D_i$  で,  $f|_{D_i} : D_i \rightarrow M$  が埋め込みとなるものが存在する。このとき,  $f(D_1)$  と  $f(D_2)$  は  $M$  内で横断的に交わる二つの 2次元円板である。そこで, 必要ならばさらに  $D_1, D_2$  を小さくとることにより,  $f(D_1) \cap f(D_2)$  は 1本の弧とできる。よって,  $y$  の  $\Sigma_2(f)$  における近傍で, 弧に同相なものがとれる。したがって,  $\Sigma_2(f)$  は有限個の連結成分からなる 1次元多様体である。

ここで,  $\Sigma_2(f)$  の連結成分でコンパクトでないものがあつたとして, それを  $\alpha$  とする。 $\alpha$  の  $M$  における閉包を  $\text{cl}(\alpha)$  とすると,  $G$  がコンパクトであることから  $\text{cl}(\alpha) - \alpha \neq \emptyset$  である。よって  $y_0 \in \text{cl}(\alpha) - \alpha$  とすると,  $y_0 \in \Sigma_1(f) \cup \Sigma_3(f)$  である。これは仮定に矛盾し,  $\Sigma_2(f)$  はコンパクトである。すなわち  $\Sigma_2(f)$  は有限個の弧または単純閉曲線である。しかも  $f(\partial G) \subset \partial M$  より,  $S_2(f)$  の連結成分は,  $G$  に適切に埋め込まれた弧または単純閉曲線である。  $\square$

**補題 12.11**  $D$  を 2次元円板,  $M$  を 3次元多様体とし,  $f : (D, \partial D) \rightarrow (M, \partial M)$  を一般の位置写像とする。また  $\Sigma_1(f) = \Sigma_3(f) = \emptyset$  とする。このとき, 次の条件 (i), (ii), (iii) をみたす一般の位置写像  $g : (D, \partial D) \rightarrow (M, \partial M)$  が存在する。

- (i)  $\Sigma_1(g) = \Sigma_3(g) = \emptyset$ .
- (ii)  $g(\partial D) = f(\partial D)$ .
- (iii)  $\Sigma_2(g)$  の連結成分はすべて弧。

**証明** 補題 12.10 より,  $\Sigma_2(f)$  の連結成分は, 弧または単純閉曲線である。 $\Sigma_2(f)$  の連結成分がすべて弧のときは,  $g = f$  とおけばよい。

$\Sigma_2(f)$  が単純閉曲線をもつとして, それを  $\alpha$  とする。 $\alpha$  の各点は  $f$  の 2 重点なので,  $f|_{f^{-1}(\alpha)} : f^{-1}(\alpha) \rightarrow \alpha$  は 2 重被覆射影である。したがって  $f^{-1}(\alpha)$  は, 一つまたは二つの連結成分からなる。

$f^{-1}(\alpha)$  が二つの連結成分からなるとき,  $f^{-1}(\alpha) = \alpha_1 \cup \alpha_2$  とおく。 $\alpha_i$  は  $D$  内の単純閉曲線なので,  $\alpha_i$  を境界とする  $D$  内の 2 次元円板を  $D_i$  とする。このとき,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$  かまたは  $D_2 \subset D_1$  としてよい。

$D_1 \cap D_2 = \emptyset$  のとき,  $V$  を  $\alpha$  の  $M$  における正則近傍 とする。4.6 節で述べたように,  $V$  はトーラス体か, またはクラインの壺体である。ここで,  $f|_{\partial D_1} : \partial D_1 \rightarrow \alpha$  は同相写像なので,  $\alpha$  は  $M$  において 1 点にホモトピックである。したがって,  $V$  はトーラス体であり, 必要ならば  $V$  を十分小さくとって,  $V \cap \Sigma_2(f) = \alpha$  であり,  $f^{-1}(V)$  は  $D$  における  $f^{-1}(\alpha)$  の正則近傍とできる。よって,  $f^{-1}(V) = A_1 \cup A_2$ , ただし  $A_i$  は  $\alpha_i$  の  $D$  における正則近傍 (アニュラス) ( $i = 1, 2$ ) とおける。ここで,  $\partial A_i$  の二つの連結成分を  $\beta'_i, \beta''_i$  とし,  $\beta'_i, \beta''_i$  を境界とする  $D$  内の 2 次元円板をそれぞれ  $D'_i, D''_i$  とする。ただし  $D''_i \subset D'_i$  ( $i = 1, 2$ ) とする (図 12.2)。

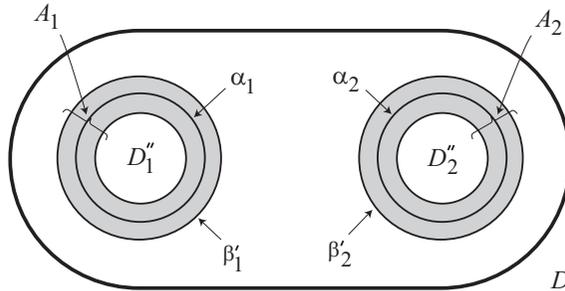


図 12.2

$f(A_1), f(A_2)$  は, それぞれ  $V$  に適切に埋め込まれたアニュラスであり,  $\partial f(A_1) = f(\beta'_1) \cup f(\beta''_1)$ ,  $\partial f(A_2) = f(\beta'_2) \cup f(\beta''_2)$  である。よって  $\partial V$  上のアニュラス  $B_1, B_2$  で,  $\partial B_1 = f(\beta'_1) \cup f(\beta''_2)$ ,  $\partial B_2 = f(\beta'_2) \cup f(\beta''_1)$  であり  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  となるものが存在する。ゆえに  $f_1 : D \rightarrow M$  を,

$$f_1|_{D - (D'_1 \cup D'_2)} = f|_{D - (D'_1 \cup D'_2)}$$

$$f_1(A_1) = B_1, f_1(A_2) = B_2, f_1(D''_1) = f(D''_2), f_1(D''_2) = f(D''_1)$$

と定める。このとき,  $\Sigma_1(f_1) = \Sigma_3(f_1) = \emptyset$ ,  $f_1(\partial D) = f(\partial D)$  であり,  $\Sigma_2(f_1)$  の連結成分の数は,  $\Sigma_2(f)$  のそれよりも一つ減少している。

$D_2 \subset D_1$  のとき,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$  のときと同様に,  $\alpha$  の  $M$  における正則近傍 (トーラス体)  $V$  で,  $V \cap \Sigma_2(f) = \alpha$  となるものが存在し,  $f^{-1}(V) = A_1 \cup A_2$ , ただし  $A_i$  は  $\alpha_i$  の  $D$  における正則近傍 (アニュラス) ( $i = 1, 2$ ) とおける。ここで,  $\partial A_1$  の連結成分で  $D_1$  に含まれないものを  $\beta_1$  とし,  $\partial A_2$  の連結成分で  $D_2$  に含まれるものを  $\beta_2$  とする。また,  $\beta_1$

を境界とする  $D$  内の 2 次元円板を  $D'_1$ ,  $\beta_1 \cup \beta_2$  を境界とする  $D$  内のアニュラスを  $A_3$ ,  $\beta_2$  を境界とする  $D$  内の 2 次元円板を  $D'_2$  とする (図 12.3)。

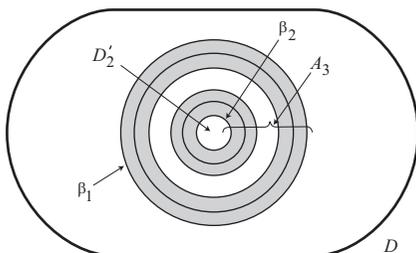


図 12.3

$f(A_1), f(A_2)$  は, それぞれ  $V$  に適切に埋め込まれたアニュラスであり,  $f(\beta_1), f(\beta_2)$  は, それぞれ  $f(\partial A_1), f(\partial A_2)$  の一つの連結成分である。よって  $\partial V$  上のアニュラス  $B$  で,  $\partial B = f(\beta_1) \cup f(\beta_2)$  となるものが存在する。ゆえに  $f_1: D \rightarrow M$  を,  $f_1|_{D-D'_1} = f|_{D-D'_1}$ ,  $f_1(A_3) = B$ ,  $f_1(D'_2) = f(D_2)$  と定める。このとき,  $\Sigma_1(f_1) = \Sigma_3(f_1) = \emptyset$ ,  $f_1(\partial D) = f(\partial D)$  であり,  $\Sigma_2(f_1)$  の連結成分の数は,  $\Sigma_2(f)$  のそれよりも少なくとも一つ減少している。

$f^{-1}(\alpha)$  が一つの連結成分からなるとき,  $V$  を  $\alpha$  の  $M$  における正則近傍で,  $V \cap \Sigma_2(f) = \alpha$  をみたまものとする。  $V$  はトーラス体か, またはクラインの壺体である。  $f^{-1}(\alpha) = \tilde{\alpha}$  とおき,  $f^{-1}(V) = A$  とおく。  $A$  は  $D$  における  $\tilde{\alpha}$  の正則近傍としてよいのでアニュラスである。  $V$  を十分小さくとると,  $V$  に適切に埋め込まれた本質的 2 次元円板  $E$  で,  $f(A)$  との交わりが, 図 12.4(1) のようなバツ印 “ $\times$ ” となるものがとれる。このとき,  $E$  で  $V$  を切り開いて得られる多様体を  $W$  とすると,  $W \cong E \times I$  であり,  $W \cap f(A) \cong \{ \times \} \times I$  となる (図 12.4(2))。

よって  $V$  は,  $W$  から  $E \times \{0\}$  と  $E \times \{1\}$  を同一視して得られるが, このとき,  $W \cap f(A)$  から  $f(A)$  が実現されなければならない。このことに注意すると,  $V$  はクラインの壺体となる (問題 12.2)。

さて,  $\partial A$  の二つの連結成分を  $\beta_1, \beta_2$  とし,  $\beta_1, \beta_2$  を境界とする  $D$  内の 2 次元円板をそれぞれ  $D_1, D_2$  とする。このとき  $D_2 \subset D_1$  としてよい。ここで,  $f(\beta_1), f(\beta_2)$  は  $\partial V$  における 2 本の単純閉曲線であり, 問題 12.2 の考察により,  $\partial V$  上のアニュラス  $B$  で,  $\partial B = f(\beta_1) \cup f(\beta_2)$  となるものが存在する。ゆえに  $f_1: D \rightarrow M$  を,  $f_1|_{D-D_1} = f|_{D-D_1}$ ,  $f_1(A) = B$ ,  $f_1(D_2) = f(D_2)$  と定める。このとき,  $\Sigma_1(f_1) = \Sigma_3(f_1) = \emptyset$ ,  $f_1(\partial D) = f(\partial D)$  であり,  $\Sigma_2(f_1)$  の連結成分の数は,  $\Sigma_2(f)$  のそれよりも一つ減少している。

以上の操作を続けることにより, 求める一般の位置写像  $g: D \rightarrow M$  を得る。  $\square$

**問題 12.2** 補題 12.11 の後半の証明において,  $V$  がクラインの壺体となることを示せ。

**補題 12.12**  $D$  を 2 次元円板,  $M$  を 3 次元多様体,  $F$  を  $\partial M$  内の曲面とし,  $N$  を  $\pi_1(F)$  のある正規部分群とする。また  $f: (D, \partial D) \rightarrow (M, F)$  を一般の位置写像とし,

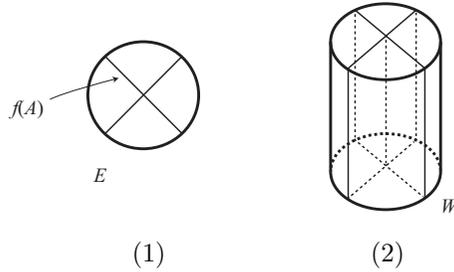


図 12.4

$[f(\partial D)] \notin N$  とする。さらに  $\Sigma_1(f) = \Sigma_3(f) = \emptyset$  であり,  $\Sigma_2(f)$  は  $\emptyset$  かまたは有限個の弧からなるとする。このとき, 埋め込み  $g : (D, \partial D) \rightarrow (M, F)$  で,  $[g(\partial D)] \notin N$  となるものが存在する。

**証明**  $\Sigma_2(f) = \emptyset$  ならば  $g = f$  とおけばよい。 $\Sigma_2(f) \neq \emptyset$  とし,  $\alpha$  をその連結成分の一つとする。 $\alpha$  は弧なので,  $f^{-1}(\alpha)$  は二つの連結成分からなり, それらを  $\alpha_1, \alpha_2$  とする。 $\alpha_1, \alpha_2$  はそれぞれ  $D$  に適切に埋め込まれた弧である。 $V$  を  $\alpha$  の  $M$  における正則近傍で,  $V \cap \Sigma_2(f) = \alpha$  となるものとする。 $f^{-1}(V)$  は  $\alpha_1 \cup \alpha_2$  の  $D$  における正則近傍としてよいので,  $D$  内の二つの 2 次元円板である。このとき, 補題 12.11 の証明と同様の切り貼り技法によって, 二つの一般の位置写像  $f_1 : (D, \partial D) \rightarrow (M, F)$ ,  $f_2 : (D, \partial D) \rightarrow (M, F)$  で,  $\Sigma_1(f_i) = \Sigma_3(f_i) = \emptyset$  ( $i = 1, 2$ ) であり,  $\Sigma_2(f_i)$  は  $\emptyset$  かまたは有限個の弧であり, なおかつその個数は  $\Sigma_2(f)$  のそれよりも減少しているものが得られる。 $f$  から  $f_1, f_2$  を得る模式的な状況を図 12.5 に示した。 $f_1$  は  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  で挟まれた  $D$  内の 2 次元円板を取り除いた写像であり,  $f_2$  はそれを反転させた写像である。

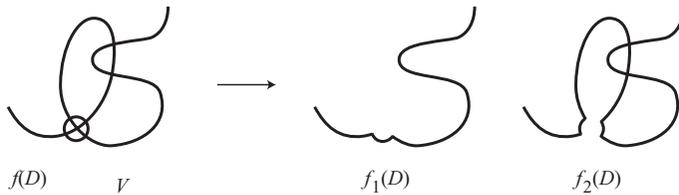


図 12.5

ここで  $\alpha$  に向きを一つ指定し,  $\alpha_1, \alpha_2$  には  $\alpha$  の向きから定まるものを指定する。このとき,  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  の向きに関して, 図 12.6 に描かれたように, 順向している場合 (図 12.6(1)) と, 逆向している場合 (図 12.6(2)) がある。

$\partial D$  を, 図 12.6 に示したように, 反時計まわりに四つの弧  $b, c, d, e$  に分ける。また,  $f(b) = \beta, f(c) = \gamma, f(d) = \delta, f(e) = \epsilon$  とおく。そして,  $[f(\partial D)]$  をこれらの四つの道のホモトピー類と考えると, 以下にその計算を行う。

$\alpha_1$  と  $\alpha_2$  が順向している場合。

$$\begin{aligned} [f(\partial D)] &= [\beta\gamma\delta\epsilon] = [\beta\gamma\epsilon\beta^{-1}\beta\epsilon^{-1}\delta\gamma^{-1}\gamma\epsilon] \\ &= [\beta][\gamma\epsilon][\beta^{-1}][\beta\epsilon^{-1}\delta\gamma^{-1}][\gamma\epsilon] = [\beta][\gamma\epsilon][\beta]^{-1}[\gamma\delta^{-1}\epsilon\beta^{-1}]^{-1}[\gamma\epsilon] \end{aligned}$$

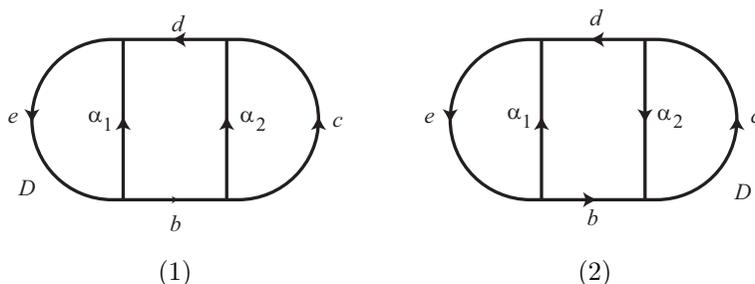


図 12.6

である。

図 12.5 と図 12.6(1) に注意すると,  $[\gamma\epsilon] = [f_1(\partial D)]$  であり,  $[\gamma\delta^{-1}\epsilon\beta^{-1}] = [f_2(\partial D)]$  なので,

$$[f(\partial D)] = [\beta][f_1(\partial D)][\beta]^{-1}[f_2(\partial D)]^{-1}[f_1(\partial D)]$$

を得る。ここで  $[f_1(\partial D)], [f_2(\partial D)]$  がともに  $N$  の元ならば,  $N$  が  $\pi_1(F)$  の正規部分群であることより,  $[f(\partial D)]$  も  $N$  の元となり矛盾である。したがって, これらのうち少なくとも一方は  $N$  の元ではない。

$\alpha_1$  と  $\alpha_2$  が逆向している場合。

$$\begin{aligned} [f(\partial D)] &= [\beta\gamma\delta\epsilon] = [\beta\gamma\epsilon^{-1}\beta^{-1}\epsilon^{-1}\epsilon\gamma^{-1}\gamma\beta\epsilon\delta\epsilon] \\ &= [\beta][\gamma\epsilon^{-1}][\beta^{-1}][\epsilon^{-1}][\epsilon\gamma^{-1}][\gamma\beta\epsilon\delta][\epsilon] \\ &= [\beta][\gamma\epsilon^{-1}][\beta]^{-1}[\epsilon]^{-1}[\gamma\epsilon^{-1}]^{-1}[\gamma\beta\epsilon\delta][\epsilon] \end{aligned}$$

である。

図 12.5 と図 12.6(2) に注意すると,  $[\gamma\epsilon^{-1}] = [f_1(\partial D)]$  であり,  $[\gamma\beta\epsilon\delta] = [f_2(\partial D)]$  なので,

$$[f(\partial D)] = [\beta][f_1(\partial D)][\beta]^{-1}[\epsilon]^{-1}[f_1(\partial D)]^{-1}[f_2(\partial D)][\epsilon]$$

を得る。したがって,  $[f_1(\partial D)], [f_2(\partial D)]$  のうち少なくとも一方は  $N$  の元ではない。

以上の操作を続けることにより, 求める埋め込み  $g : (D, \partial D) \rightarrow (M, F)$  を得る。  $\square$

上記の二つの補題のから, 次が得られる。

**補題 12.13**  $D$  を 2 次元円板,  $M$  を 3 次元多様体,  $F$  を  $\partial M$  内の曲面とし,  $N$  を  $\pi_1(F)$  のある正規部分群とする。また,  $f : (D, \partial D) \rightarrow (M, F)$  を一般の位置写像とし,  $[f(\partial D)] \notin N$  とする。このとき,  $\Sigma_1(f) = \Sigma_3(f) = \emptyset$  ならば, 埋め込み  $g : (D, \partial D) \rightarrow (M, F)$  で  $[g(\partial D)] \notin N$  となるものが存在する。

さて,  $\tilde{X}, X$  を二つの位相空間とし, 全射連続写像  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  が次の条件 (\*) をみたすとする。

(\*)  $X$  の任意の点  $x$  に対して,  $x$  の弧状連結な開近傍  $U$  が存在し,  $p^{-1}(U)$  の任意の弧状連結成分  $V$  に対して,  $p|_V : V \rightarrow U$  は同相写像となる。

このとき,  $\tilde{X}$  または  $(\tilde{X}, p)$  を,  $X$  の被覆空間とよび,  $p$  を被覆射影とよぶ。  $X$  の任意の 2 点  $x, y$  に対して,  $p^{-1}(x)$  と  $p^{-1}(y)$  の集合としての濃度は等しいことが知られているので,  $p^{-1}(x)$  が有限集合のとき,  $(\tilde{X}, p)$  を有限被覆空間, 無限集合のとき無限被覆空間という。  $(\tilde{X}, p)$  が有限被覆空間のとき,  $p^{-1}(x)$  に含まれる点の個数 ( $n$  とする) を被覆度または被覆位数という。このとき  $\tilde{X}$  を,  $X$  の  $n$  重被覆空間という。被覆空間について詳しくは, [4] を参照されたい。

**補題 12.14**  $M$  をコンパクトな 3 次元多様体とし,  $\partial M$  は 2 次元球面以外の連結成分をもつとする。このとき,  $M$  の 2 重被覆空間が存在する。

**証明** まず,  $H_1(M; \mathbf{Z}_2)$  が自明な群ではないことを示す。そのために,  $H_1(M; \mathbf{Z}_2) \cong \{0\}$  と仮定する。ここで,  $H_1(M; \mathbf{Z}_2)$  は  $M$  の  $\mathbf{Z}_2$  係数 1 次元ホモロジー群である。また,  $H^1(M; \mathbf{Z}_2)$  を  $M$  の  $\mathbf{Z}_2$  係数 1 次元コホモロジー群とする。

ポアンカレ・レフシェツの双対定理より,  $H_2(M, \partial M; \mathbf{Z}_2) \cong H^1(M; \mathbf{Z}_2)$  であり,  $\mathbf{Z}_2$  係数のコホモロジー群はホモロジー群に同形であることから,  $H^1(M; \mathbf{Z}_2) \cong H_1(M; \mathbf{Z}_2)$  である。したがって,  $H_2(M, \partial M; \mathbf{Z}_2) \cong H_1(M; \mathbf{Z}_2)$  であり, 仮定より  $H_1(M; \mathbf{Z}_2) \cong \{0\}$  なので,  $H_2(M, \partial M; \mathbf{Z}_2) \cong \{0\}$  である。また一般に, 次のようなホモロジー群の完全系列が成り立つ。

$$\cdots \rightarrow H_2(M, \partial M; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_1(\partial M; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_1(M; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \cdots$$

よって  $H_1(\partial M; \mathbf{Z}_2) \cong \{0\}$  である。これは,  $\partial M$  のすべての連結成分が 2 次元球面であることを示しており, 補題の仮定に矛盾する。すなわち  $H_1(M; \mathbf{Z}_2)$  が自明な群ではないことが示された。したがって,  $\pi_1(M)$  から  $\mathbf{Z}_2$  への上への準同形写像  $\varphi: \pi_1(M) \rightarrow \mathbf{Z}_2$  が得られ,  $\text{Ker} \varphi$  に対応する  $M$  の被覆空間を  $\tilde{M}$  とすると,  $\tilde{M}$  は  $M$  の 2 重被覆空間である。□

## 12.5 ループ定理の証明

$M, F \subset \partial M, i_*: \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M), N < \pi_1(F)$  を定理 12.2 における記号とする。

$\text{Ker } i_* - N \neq \emptyset$  なので, 定理 2.16 より 2 次元円板  $D$  からの一般の位置写像  $f: (D, \partial D) \rightarrow (M, \partial F)$  で,  $[f(\partial D)] \notin N$  となるものが存在する。  $M_0 = M$  とおき,  $V_0$  を  $M_0$  における  $f(D)$  の正則近傍で,  $V_0 \cap \partial M_0 = V_0 \cap F = F_0$  が  $F$  における  $f(\partial D)$  の正則近傍となるものとする。また,  $i_0: F_0 \rightarrow F$  を包含写像とし, それが導く準同形を  $i_{0*}: \pi_1(F_0) \rightarrow \pi_1(F)$  とする。さらに  $N_0 = i_{0*}^{-1}(N)$  とおき,  $f_0 = f$  とおく。このとき,

$$f_0: D \rightarrow f_0(D) \subset V_0 \subset M, \quad f_0(\partial D) \subset F_0 \subset F \subset \partial M_0$$

であり,  $[f(\partial D)] \notin N$  より  $[f_0(\partial D)] \notin N_0$  である。

次に,  $V_0$  の 2 重被覆空間が存在するとして, それを  $p_1: M_1 \rightarrow V_0$  とする。  $\pi_1(D)$  が自明な群なので,  $f_0$  の持ち上げ  $f_1: D \rightarrow M_1$  が存在し,  $p_1 \circ f_1 = f_0$  である。  $V_1$  を  $M_1$  における  $f_1(D)$  の正則近傍で,  $V_1 \cap \partial M_1 = V_1 \cap p_1^{-1}(F_0) = F_1$  が  $p_1^{-1}(F_0) \subset \partial M_1$  における  $f_1(\partial D)$  の正則近傍となるものとする。また,  $i_1: F_1 \rightarrow p_1^{-1}(F_0)$  を包含写像とし,  $p_1 \circ i_1: F_1 \rightarrow F_0$

が導く準同形を  $(p_1 \circ i_1)_* : \pi_1(F_1) \rightarrow \pi_1(F_0)$  とする。さらに  $N_1 = (p_1 \circ i_1)_*^{-1}(N_0)$  とおく。このとき,

$$f_1 : D \rightarrow f_1(D) \subset V_1 \subset M_1, \quad f_1(\partial D) \subset F_1 \subset p_1^{-1}(F_0) \subset \partial M_1$$

であり,  $[f_0(\partial D)] \notin N_0$  より  $[f_1(\partial D)] \notin N_1$  である。

さらに  $V_1$  が 2 重被覆空間をもつならば,  $p_2 : M_2 \rightarrow V_1$  を 2 重被覆射影としてこの操作を続ける。 $n$  回続けた段階で, 図 12.7 のような高さ  $n$  の “塔” ができあがる。

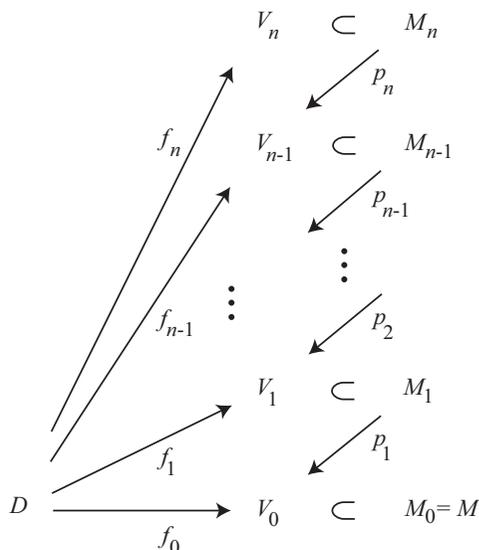


図 12.7

ここで図 12.7 の塔の状況をまとめると以下のようなになる。

$0 \leq k \leq n$  に対して,

$f_k : D \rightarrow M_k$  は, 一般の位置写像。

$V_k$  は,  $M_k$  における  $f_k(D)$  の正則近傍。

$p_{k+1} : M_{k+1} \rightarrow V_k$  は, 2 重被覆射影。

$f_{k+1} : D \rightarrow M_{k+1}$  は,  $f_k$  の持ち上げ。すなわち  $p_{k+1} \circ f_{k+1} = f_k$ 。

$F_k$  は,  $f_k(\partial D)$  の  $\partial M_k$  における正則近傍。

$N_k$  は,  $\pi_1(F_k)$  の正規部分群で,  $[f_k(\partial D)] \notin N_k$ 。

$i_{k+1} : F_{k+1} \rightarrow p_{k+1}^{-1}(F_k)$  は, 包含写像。

$(p_{k+1} \circ i_{k+1})_* : \pi_1(F_{k+1}) \rightarrow \pi_1(F_k)$  は, 準同形写像。

$N_{k+1} = (p_{k+1} \circ i_{k+1})_*^{-1}(N_k)$  は,  $\pi_1(F_{k+1})$  の正規部分群。

ここでさらに, これらの一般の位置写像  $f_0, f_1, \dots, f_n$  が,  $D$  のある固定された 3 角形分割に関して, 同時に単体写像であるようにとれることを示す。

まず  $f_0 = f$  より  $f_0$  は単体写像である。このときの  $D$  と  $M$  の 3 角形分割を  $T, K$  とする。すなわち,  $D = |T|, M = |K|$  である。また,  $K$  のある部分複体  $L$  に対して,  $f_0(D) = |L|$  である。ここで  $K$  の細分として,  $\{K$  の頂点全体  $\} \cup \{K - L$  の各単体の重心  $\}$  を頂点全体とするようなものを考える。これを  $K$  の  $L$  を法とした重心細分といい,  $K'_L$  と書く (図 12.8)。

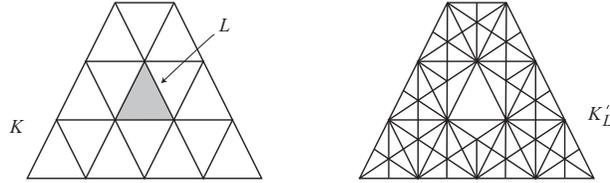


図 12.8

$K'_L$  の作り方より  $L$  は  $K'_L$  の部分複体なので,  $K'_L$  の  $L$  を法とした重心細分を考えることができる。これを  $K''_L$  と書く。このとき,  $L$  はやはり  $K''_L$  の部分複体なので,  $V_0 = |S_i(L; K''_L)|$  とおくと, 定理 2.3 と同様にして,  $V_0$  は  $M_0$  における  $|L| = f_0(D)$  の正則近傍である。したがって, 被覆射影  $p_1 : M_1 \rightarrow V_0$  によって,  $V_0$  の 3 角形分割から定まる  $M_1$  の 3 角形分割を  $K_1$  とすると,  $K_1$  の作り方から,  $f_1 : D = |T| \rightarrow M_1 = |K_1|$  は単体写像である。

この単体写像  $f_1$  に対して, 先ほどと同様の議論を用いることにより,  $M_2$  の 3 角形分割  $K_2$  で,  $f_2 : D = |T| \rightarrow M_2 = |K_2|$  が単体写像となるものが得られる。この議論を繰り返すことにより,  $f_0, f_1, \dots, f_n$  は  $D$  の 3 角形分割  $T$  と,  $M_1, M_2, \dots, M_n$  の 3 角形分割  $K_1, K_2, \dots, K_n$  に対して, 単体写像となる。また,  $f_0$  が一般の位置写像であることより,  $f_1, \dots, f_n$  も一般の位置写像である。

次に, 塔の構成は有限回で終了することを示す。まず  $k \geq 0$  に対して,

$$X(f_k) = \{(\sigma, \tau) \in T \times T \mid \sigma \neq \tau \text{ であり } f_k(\text{Int}\sigma) \cap f_k(\text{Int}\tau) \neq \emptyset\}$$

とおく。 $X(f_k)$  は  $T$  の単体の組からなる有限集合である。しかも任意の  $k$  に対して  $p_{k+1} \circ f_{k+1} = f_k$  より,  $X(f_{k+1}) \subset X(f_k)$  である。

ここでさらに  $X(f_{k+1}) \neq X(f_k)$  である。なぜならば, ある  $k$  に対して  $X(f_{k+1}) = X(f_k)$  と仮定する。このとき,  $p_{k+1}|_{f_{k+1}(D)} : f_{k+1}(D) \rightarrow f_k(D)$  は単射となる (問題 12.3)。また  $p_{k+1} \circ f_{k+1} = f_k$  より,  $p_{k+1}|_{f_{k+1}(D)} : f_{k+1}(D) \rightarrow f_k(D)$  は全射である。したがって,  $(p_{k+1}|_{f_{k+1}(D)})_* : \pi_1(f_{k+1}(D)) \rightarrow \pi_1(f_k(D))$  は同形である。よって,  $V_k$  は  $f_k(D)$  の  $M_k$  における正則近傍なので,  $i : f_k(D) \rightarrow V_k$  を包含写像とすると,  $(i \circ p_{k+1}|_{f_{k+1}(D)})_* : \pi_1(f_{k+1}(D)) \rightarrow \pi_1(V_k)$  は同形となり,  $(p_{k+1})_* : \pi_1(M_{k+1}) \rightarrow \pi_1(V_k)$  は全射となる。ところが  $p_{k+1} : M_{k+1} \rightarrow V_k$  は 2 重被覆射影なので,  $(p_{k+1})_*(\pi_1(M_{k+1}))$  は  $\pi_1(V_k)$  の指数 2 の部分群である。これは矛盾であり,  $X(f_{k+1}) \neq X(f_k)$  が示された。ゆえに塔の高さは, 集合  $X(f_0)$  の要素の数より高くなることはできず, その構成は有限回で終了する。

さて, 塔の高さを  $n$  とする。 $V_n$  は 2 重被覆空間をもたないので, 補題 12.14 より  $\partial V_n$  の

連結成分はすべて 2 次元球面である。 $F_n \subset \partial V_n$  なので,  $F_n$  を含む  $\partial V_n$  の連結成分を  $P$  とすると,  $F_n$  は  $f_n(\partial D)$  の  $P$  における正則近傍であり, 平面曲面である。 $\partial F_n$  の連結成分を  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$  とし, これらを代表元とする  $\pi_1(F_n)$  の元を  $[\alpha_1], [\alpha_2], \dots, [\alpha_\ell]$  とする。このとき  $F_n$  が平面曲面であることから,  $[\alpha_1], [\alpha_2], \dots, [\alpha_\ell]$  を含む  $\pi_1(F_n)$  の最小の正規部分群は  $\pi_1(F_n)$  に一致する。したがって,  $[f_n(\partial D)] \notin N_n$  より  $N_n \neq \pi_1(F_n)$  であることに注意すると,  $[\alpha_1] \notin N_n$  としてよい。ここで,  $\alpha_1$  は  $\partial F_n$  の一つの連結成分であり,  $F_n \subset P$  なので,  $P$  内の 2 次元円板  $D_n$  で,  $D_n \cap F_n = \partial D_n = \alpha_1$  となるものが存在する。よって,  $D_n$  の内部を  $M_n$  の内部に少し押し込み,  $\partial D_n$  を  $F_n$  の内部に少し押し込むことにより, 2 次元円板  $D_n$  の適切な埋め込み  $(D_n, \partial D_n) \subset (M_n, F_n)$  で,  $[\partial D_n] \notin N_n$  をみたすものが得られる。

次に  $p_n|_{D_n} : D_n \rightarrow V_{n-1}$  を考える。 $N_n = (p_n \circ i_n)^{-1}(N_{n-1})$  なので,  $[p_n(\partial D_n)] \notin N_{n-1}$  である。また,  $D_n$  は  $M_n$  の部分複体としてよいので,  $p_n|_{D_n} : (D_n, \partial D_n) \rightarrow (V_{n-1}, F_{n-1})$  は一般の位置写像としてよい。このとき,  $p_n$  は 2 重被覆射影なので,  $\Sigma_1(p_n|_{D_n}) = \Sigma_3(p_n|_{D_n}) = \emptyset$  である。したがって, 補題 12.13 より, 2 次元円板  $D_{n-1}$  の  $V_{n-1}$  への適切な埋め込み  $(D_{n-1}, \partial D_{n-1}) \subset (V_{n-1}, F_{n-1})$  で,  $[\partial D_{n-1}] \notin N_{n-1}$  をみたすものが得られる。しかも  $V_{n-1} \subset M_{n-1}$  なので, これは  $M_{n-1}$  への適切な埋め込み  $(D_{n-1}, \partial D_{n-1}) \subset (M_{n-1}, F_{n-1})$  である。

よって, 次に  $p_{n-1}|_{D_{n-1}} : D_{n-1} \rightarrow V_{n-2}$  を考えることにより, 2 次元円板  $D_{n-2}$  の  $M_{n-2}$  への適切な埋め込み  $(D_{n-2}, \partial D_{n-2}) \subset (M_{n-2}, F_{n-2})$  で,  $[\partial D_{n-2}] \notin N_{n-2}$  をみたすものを得る。この操作を続けることにより,  $M = M_0$  に適切に埋め込まれた 2 次元円板  $D_0$  で,  $\partial D_0 \subset F_0 \subset F$ ,  $[\partial D_0] \notin N_0$  をみたすものを得る。したがって,  $[\partial D_0] \notin N$  であり, ループ定理の証明が終わる。□

**問題 12.3** ループ定理の証明において,  $X(f_{k+1}) = X(f_k)$  とすると,  $p_{k+1}|_{f_{k+1}(D)} : f_{k+1}(D) \rightarrow f_k(D)$  が単射となることを示せ。

「交差の解消」 本章において, 被覆空間を用いた塔の構成方法を紹介した。この被覆空間というのは, 空間のある複雑な部分を切り開き, 残りの部分のコピーをつなげて, 少しのびのびとさせた空間のことである。そうすることによって少し複雑さが解消され, 必要な部分が生き残ることになる。塔の構成とは, これを繰り返すことにより, それまで複雑な部分に覆われてよく見えなかった部分を明らかにし, 求める曲面を得る方法である。また 11 章において A 型イソトピーという方法を紹介したが, これは, ハンドル体における境界圧縮を用いて曲面を動かし, ヒーガード曲面に対してよい位置にある曲面を求める方法である。しかしこれらに共通することは, 曲面と曲面との交わりをできるだけ少なくしようということであり, この交差の解消のために, 多くのトポロジストが努力を続けてきたといっても過言ではない。

# 第13章

## 圧縮不可能曲面

本章において、3次元多様体内に適切に埋め込まれた2次元多様体で、圧縮不可能曲面とよばれるものについて学ぶ。このような曲面は、特にそれが両側曲面である場合、それを含む3次元多様体の位相形に大きな影響を与える。

### 13.1 圧縮不可能曲面の定義

$M$  を3次元多様体とし、 $F$  を  $M$  に適切に埋め込まれた曲面とする。ただし  $F$  は2次元球面、または2次元円板ではないとする。 $M$  内に次の条件(\*)をみたす2次元円板  $D$  があるとき、この  $D$  を  $F$  の圧縮円板といい、 $F$  を圧縮可能または圧縮可能曲面という。

(\*)  $D \cap F = \partial D$  であり、 $\partial D$  は  $F$  内の本質的単純閉曲線。

$F$  の圧縮円板が存在しないとき、 $F$  を圧縮不可能または圧縮不可能曲面という。2次元球面と2次元円板に対しては、それらが本質的であるとき、圧縮不可能、非本質的であるとき、圧縮可能という。

**補題 13.1**  $M$  を3次元多様体とし、 $F$  を  $M$  に適切に埋め込まれた両側曲面とする。 $F$  が圧縮不可能ならば、 $i_* : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$  は単射である。

**証明**  $F$  が2次元球面かまたは2次元円板のとき、 $\pi_1(F)$  は自明な群なので、 $i_*$  は単射である。

よって、 $F$  は2次元球面または2次元円板ではないとし、補題の対偶を示すために、 $i_* : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$  は単射でないと仮定する。このとき、2次元円板  $D$  から  $M$  への連続写像  $f : D \rightarrow M$  で、 $f(\partial D) \subset F$  であり、 $[f(\partial D)]$  が  $\pi_1(F)$  の単位元ではないものが存在する。定理 2.16 より  $f$  は一般の位置写像としてよいので、 $f|_{\partial D} : \partial D \rightarrow F$  ははめこみであり、 $F$  が両側曲面であることから、 $\partial D$  の  $D$  における正則近傍  $N$  で、 $f(N) \cap F = f(\partial D)$  をみたすものが存在する (問題 13.1)。よって、 $f(D)$  と  $F$  との交わりは横断的であることに注意すれば、

$$f^{-1}(F) = \partial D \cup (D \text{ の内部のいくつかの単純閉曲線})$$

である。 $f^{-1}(F)$  の連結成分の個数を  $n$  として、 $F$  が圧縮可能であることを、 $n$  についての数学的帰納法で示す。

$n = 1$  のとき。 $f^{-1}(F) = \partial D$  である。 $M$  を  $F$  で切り開いて得られる3次元多様体を  $M'$  とし、切り口に残った  $F$  の像を  $F_1, F_2$  とする。このとき、 $f^{-1}(F) = \partial D$  であること

から,  $i_* : \pi_1(F_1) \rightarrow \pi_1(M')$  は単射ではないとしてよい。よってループ定理 (系 12.3) より,  $M'$  に適切に埋め込まれた 2 次元円板  $D'$  で,  $D' \cap \partial M' = D' \cap F_1 = \partial D'$  であり,  $\partial D'$  は  $F_1$  において本質的単純閉曲線となるものが存在する。この  $D'$  は  $F_1$  の圧縮円板であるが, その作り方から  $M$  における  $F$  の圧縮円板となる。すなわち  $F$  は圧縮可能である。

$n > 1$  とし,  $f^{-1}(F)$  の連結成分の個数が  $n$  より小さいときは,  $F$  が圧縮可能であると仮定する。

$f^{-1}(F) - \partial D \neq \emptyset$  なので,  $f^{-1}(F) - \partial D$  の連結成分のうち,  $D$  の中で最も内側のものを  $C$  とし,  $C$  を境界とする  $D$  内の 2 次元円板を  $E$  とする。  $[f(C)]$  が  $\pi_1(F)$  において単位元でないときは,  $f|_E : E \rightarrow M$  に対して,  $n = 1$  のときと同様の議論を用いて,  $F$  の圧縮円板を得る。

$[f(C)]$  が  $\pi_1(F)$  において単位元るとき,  $f(C)$  は  $F$  において 1 点にホモトピックなので, 連続写像  $g : E \rightarrow F$  で,  $g(\partial E) = f(C)$  となるものが存在する。そこで,  $f' = f|_{D-E} \cup g$  とおくと,  $f' : D \rightarrow M$  であり  $f'(E) \subset F$  である。よって,  $f'(E)$  の部分を  $F$  からすこしずらした写像を  $f''$  とおけば,  $f''(\partial D) = f(\partial D)$  であり, なおかつ  $f''^{-1}(F)$  の連結成分の個数は  $n - 1$  である。したがって帰納法の仮定から  $F$  は圧縮可能である。

以上で,  $i_* : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$  が単射でないならば,  $F$  が圧縮可能であることが示され, 対偶をとることにより補題の証明が終わる。  $\square$

**問題 13.1** 補題 13.1 の証明において,  $\partial D$  の  $D$  における正則近傍  $N$  で,  $f(N) \cap F = f(\partial D)$  をみたすものが存在するように,  $D$  をとれることを示せ。

ここで補題 11.6 を思い出してみよう。この補題における 2 次元円板  $D$  は,  $S$  の圧縮円板なので, これは  $S$  が圧縮不可能曲面ならば,  $S \cap (D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g) \neq \emptyset$  であるという主張である。したがって  $S$  が両側曲面の場合は, 補題 11.6 は補題 13.1 の系といえる。

## 13.2 射影空間 $P^3$

前節で示した補題 13.1 の中に, 曲面  $F$  は両側曲面であるという仮定があった。本節において, 両側曲面という仮定がないならば, この補題は成り立たないということを具体例を通して学ぶ。

$B^3 = \{ (x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$  を 3 次元単位球体とする。また,  $f : \partial B^3 \rightarrow \partial B^3$  を  $f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$  で定義される写像とする。これは  $\partial B^3$  上の点を, 原点に関して対称な点に対応させるという写像である。そして,  $B^3$  において  $f$  によって対応する点を同一視して得られる 3 次元多様体を射影空間といい,  $P^3$  と書く。すなわち  $P^3 = B^3/f$  である。

**命題 13.3**  $P^3$  は  $(2, 1)$  形のレンズ空間  $L(2, 1)$  に同相である。

**証明**  $W_1 = \{ (x, y, z) \in B^3 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \}$ ,  $W_2 = \{ (x, y, z) \in B^3 \mid x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \}$  とおき,  $V_1 = W_1/f$ ,  $V_2 = W_2/f$  とおく (図 13.1)。

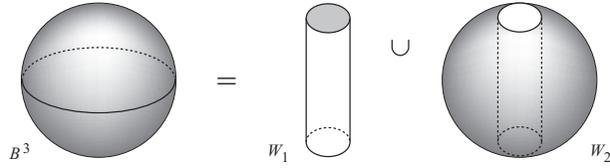


図 13.1

このとき  $V_1, V_2$  はトーラス体であり (問題 13.2),  $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$  である。よって  $P^3$  はあるレンズ空間である。

$$E_1 = \{ (x, y, 0) \in W_1 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \}$$

$$E_2 = \{ (x, 0, z) \in W_2 \mid x \geq \frac{1}{2} \} \cup \{ (x, 0, z) \in W_2 \mid x \leq -\frac{1}{2} \}$$

とおき,  $D_1 = E_1/f, D_2 = E_2/f$  とおく。

このとき  $D_1, D_2$  はそれぞれトーラス体  $V_1, V_2$  のメリディアン円板であり (問題 13.2),  $\partial D_1$  と  $\partial D_2$  は同じ向きで 2 点で交わる。よって  $P^3 \cong L(2, k)$  である。しかも問題 8.7 より  $L(2, k) \cong L(2, 1)$  なので,  $P^3$  はレンズ空間  $L(2, 1)$  に同相である。□

**問題 13.2** 命題 13.2 の証明において,  $V_1, V_2$  がともにトーラス体であり,  $D_1, D_2$  がそれぞれ  $V_1, V_2$  のメリディアン円板であることを示せ。

**命題 13.3**  $M$  を向き付け可能 3 次元多様体とする。  $M$  が射影平面  $P^2$  を含むならば, ある 3 次元多様体  $M_1$  によって  $M \cong M_1 \# P^3$  となる。

**証明**  $M$  は向き付け可能であり,  $P^2$  は向き付け不可能なので, 命題 5.3 より  $P^2$  は  $M$  において片側曲面である。  $P^2 \cap \partial M \neq \emptyset$  のときは,  $P^2$  を  $M$  の内部に少し押し込むことにより,  $P^2 \subset \text{Int}M$  としてよい。  $N$  を  $M$  における  $P^2$  の正則近傍とする。  $P^2$  はコンパクトな 2 次元多様体なので, 有限個の 2 次元円板  $D_1, D_2, \dots, D_n$  によって,  $P^2 = \bigcup_{i=1}^n D_i$  と表すことができる。このとき定理 2.3 から  $N = \bigcup_{i=1}^n D_i \times I$  としてよい。したがって  $P^2 = \bigcup_{i=1}^n D_i \times \{\frac{1}{2}\}$  と考えて,  $f: \partial N \rightarrow P^2$  を  $f(D_i \times \partial I) = D_i \times \{\frac{1}{2}\}$  と定めると,  $f$  は 2 重被覆射影である。ここで  $P^2$  は片側曲面なので,  $\partial N$  は連結である。よって  $\partial N$  は 2 次元球面である。

$M'_1 = \text{cl}(M - N)$  とおく。  $M'_1 \cap N = \partial N$  なので,  $\partial M'_1$  の連結成分のうち,  $\partial N$  の部分に 3 次元球体を貼り合わせて得られる 3 次元多様体を  $M_1$  とおく。また,  $N$  の境界  $\partial N$  に 3 次元球体を貼り合わせて得られる 3 次元多様体を  $M_2$  とおく。このとき  $M \cong M_1 \# M_2$  であり, 問題 13.3 より  $M_2 \cong P^3$  である。よって  $M \cong M_1 \# P^3$  を得る。□

**問題 13.3** 命題 13.3 の証明において,  $M_2 \cong P^3$  を示せ (問題 16.7 参照)。

**【注意】** 命題 13.3 の証明における  $P^2$  の正則近傍  $N$  は, 16.3 節において紹介する  $P^2$  上のひねり  $I$  束である。

**補題 13.4**  $K$  をクラインの壺とし,  $\alpha$  を  $K$  上の本質的両側単純閉曲線とする。このと

き、 $\alpha$  は  $K$  を一つのアニュラスか、または二つのメービウスの帯に切り開く (図 13.2)。ここで曲面上の単純閉曲線  $\alpha$  が両側であるとは、 $\alpha$  のその曲面における正則近傍が  $\alpha \times I$  に同相となることである。

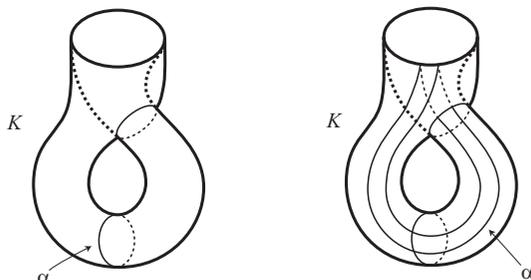


図 13.2

上記の補題の証明は省略するが、補題 8.1 と同様の方法で示すことができる。

**命題 13.5**  $M$  を向き付け可能 3 次元多様体とする。 $M$  が圧縮可能なクラインの壺を含むならば、ある 3 次元多様体  $M_1$  によって、 $M \cong M_1 \# S^2 \times S^1$  か、または  $M \cong M_1 \# P^3 \# P^3$  となる。

**証明**  $K$  を  $M$  内の圧縮可能なクラインの壺とし、 $D$  を  $K$  の圧縮円板とする。 $V$  を  $\partial D$  の  $M$  における正則近傍で、 $V \cap D$  が  $\partial D$  の  $D$  における正則近傍 (アニュラス) となるものとする。このとき  $V \cap K$  は  $V$  に適切に埋め込まれたアニュラスとしてよいので、 $\partial D$  は  $K$  における両側曲線である。よって  $D \times I$  の  $M$  への埋め込みで、 $D \times \{\frac{1}{2}\} = D$ 、 $D \times I \cap K = \partial D \times I$  は  $\partial D$  の  $K$  における正則近傍、となるものが存在する。このとき補題 13.4 より以下の 2 通りの場合がある。

$\partial D$  が  $K$  をアニュラスに切り開く場合。このとき  $S = (K - \partial D \times I) \cup D \times \{0\} \cup D \times \{1\}$  とおくと、 $S$  は  $M$  内の 2 次元球面である。しかも  $S$  は  $M$  において非分離的なので (問題 13.4)、補題 10.6 より  $M \cong M_1 \# S^2 \times S^1$  となる。

$\partial D$  が  $K$  を二つのメービウスの帯に切り開く場合。このとき  $\text{cl}(K - \partial D \times I) = F_0 \cup F_1$ 、ただし  $F_i \cap \partial D \times I = \partial D \times \{i\}$  ( $i = 0, 1$ ) とおくと、 $F_0, F_1$  はともにメービウスの帯である。よって、 $P_0 = F_0 \cup D \times \{0\}$ 、 $P_1 = F_1 \cup D \times \{1\}$  とおくと、 $P_0, P_1$  はともに  $M$  内の射影平面であり、命題 13.3 より、 $M \cong M_1 \# P^3 \# P^3$  となる。  $\square$

**問題 13.4** 命題 13.5 の証明において、 $S$  が  $M$  において非分離的であることを示せ。

**問題 13.5**  $g$  を正の整数、 $q$  を正の奇数とする。レンズ空間のヒーガード図式を実際に描くことにより、次を示せ。

- (1) レンズ空間  $L(2g, 1)$  は、種数  $g$  の向き付け不可能閉曲面  $N_g$  を含む。
- (2) 一般にレンズ空間  $L(2g, q)$  は、種数  $g$  の向き付け不可能閉曲面  $N_g$  を含む。

問題 13.5 より、 $L(4, 1)$  はクラインの壺を含むことがわかる。そこで次を示せ。

**問題 13.6**  $L(4, 1)$  内のクラインの壺は、圧縮不可能である（命題 13.5 を用いる）。

さて、 $L(4, 1)$  内のクラインの壺を  $K$  とし、 $i : K \rightarrow L(4, 1)$  を包含写像、 $i_* : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(L(4, 1))$  をそれが導く準同形写像とする。もし  $i_*$  が単射であるならば、 $\pi_1(L(4, 1))$  は  $\pi_1(K)$  を部分群として含むことになる。しかし  $\pi_1(L(4, 1))$  は位数 4 の巡回群なので有限群であるが、 $\pi_1(K)$  は無限群なので、それは不可能である。したがって  $i_*$  は単射ではない。この例により、補題 13.1 において  $F$  が片側曲面の場合、 $F$  が圧縮不可能であっても、一般には  $i_*$  が単射とはならないということがわかる。

### 13.3 1次元ホモロジー群と両側圧縮不可能曲面

コンパクトな向き付け可能 3次元多様体  $M$  が、適切に埋め込まれた非分離的両側曲面をもつとしよう。このとき、補題 12.9 と同様の議論により、 $H_1(M; \mathbf{Z})$  は無限群となる。そしてさらに逆も成り立つということを示すのが、本節の目標である。

**補題 13.6**  $M$  をコンパクトな向き付け可能 3次元多様体とする。連続写像  $f : M \rightarrow S^1$  で、 $f_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(S^1)$  が全射となるものがあるならば、次の条件 (\*) をみたす連続写像  $g : M \rightarrow S^1$  で、 $g_* = f_*$  となるものが存在する。

(\*)  $S^1$  内のある点  $y$  に対して、 $g^{-1}(y)$  は、 $M$  における非分離的両側圧縮不可能曲面を連結成分にもつ。

**証明** 単体近似定理より、 $M$  と  $S^1$  のある 3 角形分割に対して、 $f$  は単体写像としてよい。 $y$  を  $S^1$  の 3 角形分割の頂点ではない点とする。 $f^{-1}(y)$  が空集合とすると、 $f(M) \subset S^1 - \{y\}$  であり、 $\pi_1(S^1 - \{y\})$  は自明な群なので、これは  $f_*$  が全射であることに矛盾する。よって  $f^{-1}(y)$  は空集合ではない。このとき、 $f$  が単体写像であることに注意すると、 $f^{-1}(y)$  に  $M$  の 3 角形分割の頂点は含まれないので、 $f^{-1}(y)$  と  $M$  の各 3 次元単体との交わりの連結成分は、図 13.3 に描かれた五つの 2 次元円板の一つとなる。よって、 $f^{-1}(y)$  の連結成分は  $M$  に適切に埋め込まれた曲面となる。しかも問題 13.7 よりそれらは両側曲面であり、したがって向き付け可能である。

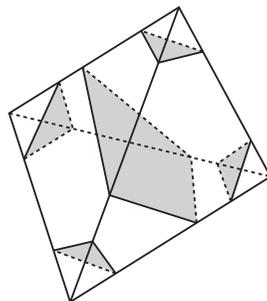


図 13.3

$f^{-1}(y)$  の連結成分で圧縮可能なものがある場合。それを  $F$  とし、 $f$  から新しい連続写像

$f_1 : M \rightarrow S^1$  を以下のように構成する。

(i)  $F$  が 2 次元球面するとき。  $M$  内の 3 次元球体  $B$  で  $\partial B = F$  となるものがある。  $N$  を  $F$  の  $M$  における正則近傍とし、  $U = B \cup N$  とおく。  $U$  も 3 次元球体である。 連続写像  $f_1 : M \rightarrow S^1$  を以下のように定める。 まず、  $f_1|_{\text{cl}(M-U)} = f|_{\text{cl}(M-U)}$  とする。 次に  $N$  を十分小さくすることにより、  $f(N)$  は  $y$  の  $S^1$  における正則近傍としてよいので、  $f(\partial U) \subset S^1 - \{y\}$  である。  $S^1 - \{y\}$  は 1 点にホモトピックなので  $\pi_2(S^1 - \{y\})$  は自明な群である。 よって  $f_1|_{\partial U}$  は 3 次元球体  $U$  から  $S^1 - \{y\}$  への連続写像に拡張する。 こうしてできた  $f_1 : M \rightarrow S^1$  は連続写像であり、  $f_1^{-1}(y) \subset f^{-1}(y) - F$  である。 また  $f_1$  と  $f$  の違いは、 3 次元球体  $U$  の部分だけなので、  $f_{1*} = f_*$  である。

(ii)  $F$  が 2 次元円板するとき。  $F$  が 2 次元球面するときと同様の方法で、 連続写像  $f_1 : M \rightarrow S^1$  で  $f_{1*} = f_*$  であり、  $f_1^{-1}(y) \subset f^{-1}(y) - F$  となるものを構成する。

(iii)  $F$  が圧縮円板  $D$  をもつ 2 次元曲面のとき。  $N$  を  $D$  の  $M$  における正則近傍で、  $N \cap F$  が  $\partial D$  の  $F$  における正則近傍となるものとする。  $N$  は 3 次元球体であり、  $\partial N \cap F$  は  $\partial N$  上の二つの単純閉曲線となるので、 それらを  $C_1, C_2$  とおく。  $D_1, D_2$  を  $\partial N$  上の二つの 2 次元円板で  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ,  $\partial D_1 = C_1, \partial D_2 = C_2$  となるものとする。  $\text{cl}(\partial N - (D_1 \cup D_2)) = A$  とおくと  $A$  はアニュラスであり、  $\partial A = C_1 \cup C_2$  である。 また  $D_1, D_2$  の内部を  $N$  に少し押し込んだ 2 次元円板を  $E_1, E_2$  とし、  $D_1 \cup E_1, D_2 \cup E_2$  を境界とする  $N$  内の 3 次元球体をそれぞれ  $B_1, B_2$  とする (図 13.4(1))。

$f_1 : M \rightarrow S^1$  を以下のように構成する。 まず、  $f_1|_{\text{cl}(M-N)} = f|_{\text{cl}(M-N)}$  とおく。 次に  $f_1(E_1) = y, f_1(E_2) = y$  と定める。 このとき  $D_i \cup E_i$  ( $i = 1, 2$ ) は 2 次元球面であり、  $(f_1|_{D_i \cup E_i})^{-1}(y) = E_i$  なので、  $f_1$  を  $B_1 \cup B_2$  上で  $(f_1|_{B_i})^{-1}(y) = E_i$  となるように定める。 さらに  $\text{cl}(N - (B_1 \cup B_2)) = N'$  とし  $N'$  における  $E_1, E_2$  の正則近傍を  $N(E_1), N(E_2)$  とする (図 13.4(2))。  $N(E_i) \cong E_i \times I, E_i \times \{0\} = E_i$  ( $i = 1, 2$ ) である。 よって、  $f_1$  を  $N(E_1) \cup N(E_2)$  上で、  $(f_1|_{N(E_i)})^{-1}(y) = E_i$  となるように定める。

このとき、  $N'' = \text{cl}(N' - (N(E_1) \cup N(E_2)))$  とおくと  $f_1(\partial N'') \subset S^1 - \{y\}$  である。 したがって、  $f_1$  を  $N''$  上で  $f_1(N'') \subset S^1 - \{y\}$  となるように拡張し、  $f_1 : M \rightarrow S^1$  を得る。 この  $f_1$  とはじめの  $f$  との違いは、 3 次元球体  $N$  の部分だけなので、  $f_{1*} = f_*$  である。 しかも  $f_1^{-1}(y)$  の連結成分のオイラー標数の和は、  $f^{-1}(y)$  のそれよりも 2 だけ増加している。

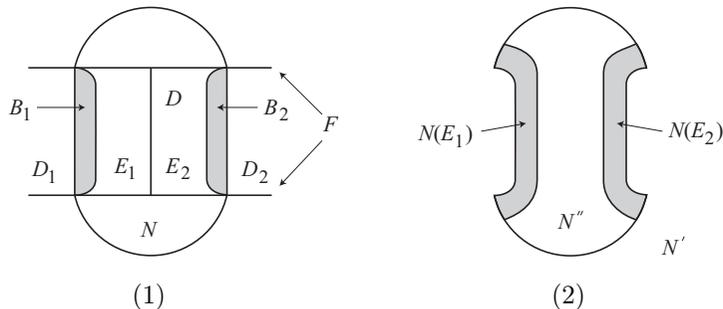


図 13.4

**副補題 13.7** 上記の (i), (ii), (iii) の議論を用いて,  $f^{-1}(y)$  のすべての連結成分が圧縮不可能であるように,  $f$  を変形できる。

**証明**  $F$  を連結でコンパクトな向き付け可能曲面とし,  $\chi(F)$  をそのオイラー標数とする。また,  $\eta(F)$  を次のように定め,  $f^{-1}(y)$  の各連結成分  $F$  に対する  $\eta(F)$  の総和を  $\eta(f)$  とする。

$$\eta(F) = \begin{cases} 0 & (\chi(F) > 0) \\ -\chi(F) + 1 & (\chi(F) \leq 0) \end{cases}$$

$f^{-1}(y)$  の連結成分の個数を  $\gamma(f)$  とし,  $\eta(f)$  と  $\gamma(f)$  の順序付けられた組  $(\eta(f), \gamma(f))$  を考える。そして PL 写像  $f' : M \rightarrow S^1$  で,  $f'^{-1}(y)$  が 2 次元多様体であり  $f'_* = f_*$  となるもの全体を考え,  $(\eta(f), \gamma(f))$  と  $(\eta(f'), \gamma(f'))$  との間に辞書式順序を入れる。すなわち,  $\eta(f) < \eta(f')$  ならば  $(\eta(f), \gamma(f)) < (\eta(f'), \gamma(f'))$  であり,  $\eta(f) = \eta(f')$  のときは  $\gamma(f) < \gamma(f')$  ならば  $(\eta(f), \gamma(f)) < (\eta(f'), \gamma(f'))$  と定める。もちろん  $\eta(f) = \eta(f')$ ,  $\gamma(f) = \gamma(f')$  のときは  $(\eta(f), \gamma(f)) = (\eta(f'), \gamma(f'))$  である。この順序において,  $(\eta(f), \gamma(f))$  についての数学的帰納法で主張を示す。

$f^{-1}(y)$  は空集合にはなりえないので, 最小の組は  $(0, 1)$  である。このとき  $f^{-1}(y)$  は, 一つの 2 次元球面かまたは一つの 2 次元円板である。よって  $f^{-1}(y)$  が圧縮可能ならば (i) または (ii) の議論により, PL 写像  $f_1 : M \rightarrow S^1$  で  $f_{1*} = f_*$  でありながら,  $f_1^{-1}(y) = \emptyset$  となるものが得られる。これは矛盾なので,  $f^{-1}(y)$  は圧縮不可能である。

$(\eta(f), \gamma(f)) > (0, 1)$  とし,  $(\eta(f'), \gamma(f')) < (\eta(f), \gamma(f))$  であるような  $f'$  については,  $f'$  を変形し,  $f'^{-1}(y)$  の各連結成分が圧縮不可能とできると仮定する。

$f^{-1}(y)$  が圧縮可能な連結成分をもつとして, それを  $F$  とする。  $F$  が 2 次元球面か 2 次元円板のときは, (i) または (ii) の議論により得られた  $f_1$  に対して,  $\eta(f_1) = \eta(f)$  であり,  $\gamma(f_1) < \gamma(f)$  なので,  $(\eta(f_1), \gamma(f_1)) < (\eta(f), \gamma(f))$  である。また  $F$  がそれ以外の曲面のときは, (iii) の議論を用いて得られた写像を  $f_1$  とする。このとき (iii) の議論において,  $\partial D$  が  $F$  において分離的ならば  $\eta(f_1) = \eta(f) - 1$  であり, 非分離的ならば  $\eta(f_1) = \eta(f) - 2$  である。よって  $\eta(f_1) < \eta(f)$  より  $(\eta(f_1), \gamma(f_1)) < (\eta(f), \gamma(f))$  である。したがって帰納法の仮定より,  $f$  は  $f^{-1}(y)$  の各連結成分が圧縮不可能であるように変形できる。  $\square$

最後に,  $f^{-1}(y)$  の連結成分で,  $M$  において非分離的なものが存在することを示す。  $\alpha$  を  $M$  内の単純閉曲線で,  $f_*([\alpha])$  が  $\pi_1(S^1)$  の生成元に対応するものとする ( $f_*$  が全射なのでこのような  $\alpha$  は存在する)。  $\alpha \cap f^{-1}(y) = \emptyset$  とすると,  $f(\alpha) \subset S^1 - \{y\}$  となって,  $f_*([\alpha])$  が  $\pi_1(S^1)$  の生成元であることに矛盾する。よって  $\alpha$  は  $f^{-1}(y)$  に有限個の点で交わるとしてよいので,  $\alpha \cap f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  とおく。ここで,  $\alpha$  に向きを一つ指定する。また,  $N$  を  $f^{-1}(y)$  の  $M$  における正則近傍で,  $N \cong f^{-1}(y) \times [0, 1]$  であり,  $N \cap \alpha = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \times [0, 1]$  であるようなものとする。そこで,  $\alpha$  と  $f^{-1}(y)$  との交点  $x_i$  において,  $\alpha$  が  $N$  を 0 から 1 に向かって横切るときは  $+1$ , 逆のときは  $-1$  と符号を付ける。このとき  $f_*([\alpha])$  が  $\pi_1(S^1)$  の生成元であることから, これらの符号の和は 1 かまた

は  $-1$  である。したがって  $k$  は奇数であり、これは  $f^{-1}(y)$  の連結成分の中に、 $M$  において非分離的なものが存在することを示している。以上で補題 13.6 の証明が終わる。  $\square$

**問題 13.7** 補題 13.6 の証明において、 $f^{-1}(y)$  の各連結成分は  $M$  に適切に埋め込まれた両側曲面であることを示せ。

**補題 13.8**  $M$  をコンパクトな 3 次元多様体とする。 $\pi_1(M)$  から  $\mathbf{Z}$  への全射準同形  $\phi: \pi_1(M) \rightarrow \mathbf{Z}$  があるならば、連続写像  $f: M \rightarrow S^1$  で  $f_* = \phi$  となるものが存在する。

**証明**  $M$  の 3 角形分割を  $K$  とする。 $K$  の 0 次元および 1 次元の単体すべてからなる  $K$  の部分複体を  $K^{(1)}$  とし、 $K$  の極大木を  $T$  とする。すなわち、 $T$  は  $K^{(1)}$  のすべての頂点を含むような  $K^{(1)}$  の部分複体であり、 $\pi_1(T)$  は自明な群である。 $K^{(1)} - T$  に含まれるすべての 1 次元単体を  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  とおくと、 $\pi_1(M)$  は  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  を生成元とする表示をもつ。 $T$  の頂点を一つ定めそれを  $x$  とし、 $x$  を基点とする  $M$  の基本群  $\pi_1(M, x)$  を考える。また  $S^1$  内の点を一つ定め  $y$  とし、 $y$  を基点とする  $S^1$  の基本群  $\pi_1(S^1, y)$  を考える。このとき、連続写像  $f: M \rightarrow S^1$  を以下のように構成する。

まず、 $f(T) = y$  とする。また、各  $e_i$  は  $\pi_1(M, x)$  の元とみなせるので、 $f_*(e_i)$  が  $\phi(e_i)$  に対応するように、 $e_i$  を  $S^1$  に巻き付ける写像を  $f(e_i)$  とする。これで  $f: K^{(1)} \rightarrow S^1$  が定まる。次に  $K$  の各 2 次元単体は、 $\pi_1(M, x)$  の関係式に対応するが、 $f(e_i)$  をはじめに与えた準同形  $\phi$  に従って定めたので、各 2 次元単体の境界の  $f$  による像は、 $S^1$  において 1 点にホモトピックである。よってこのホモトピーを用いて、 $f$  を  $K$  の 2 次元単体に拡張することができる。最後に、 $\pi_2(S^1)$  が自明な群であることより、 $f$  は 3 次元単体にも拡張される。よって、 $f: M \rightarrow S^1$  で  $f_* = \phi$  となるものが得られる。  $\square$

以上により次を得る。

**命題 13.9**  $M$  をコンパクトな向き付け可能 3 次元多様体とする。 $H_1(M; \mathbf{Z})$  が無限群ならば、 $M$  に適切に埋め込まれた、非分離的両側圧縮不可能曲面が存在する。

**証明**  $M$  はコンパクトなので、 $H_1(M; \mathbf{Z})$  は有限生成アーベル群である。よってアーベル群の基本定理により、 $H_1(M; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}_{p_r}$  と表すことができる。ゆえに  $H_1(M; \mathbf{Z})$  から  $\mathbf{Z}$  への全射準同形が存在し、 $\pi_1(M)$  から  $\mathbf{Z}$  への全射準同形が存在する。このとき、補題 13.6 と 13.8 より、 $M$  に適切に埋め込まれた、非分離的両側圧縮不可能曲面が存在する。  $\square$

命題 13.9 より、どのようなときに、3 次元多様体の 1 次元ホモロジー群が無限群になるかということが問題になる。次の補題は、そのための一つの十分条件である。

**補題 13.10**  $M$  をコンパクトな向き付け可能 3 次元多様体とする。 $\partial M$  が 2 次元球面以外の連結成分をもつならば、 $H_1(M; \mathbf{Z})$  は無限群である。

**証明**  $\partial M$  の連結成分に 2 次元球面があるならば、それらに 3 次元球体を貼り合わせて得られる 3 次元多様体を  $\text{Cap}M$  とする。仮定より  $\partial \text{Cap}M \neq \emptyset$  である。 $M$  と  $\text{Cap}M$  の  $i$

次元ベッチ数をそれぞれ  $\beta_i(M), \beta_i(\text{Cap}M)$  とする。  $i \geq 3$  のとき  $\beta_i(M) = \beta_i(\text{Cap}M) = 0$  であり、  $\beta_0(M) = \beta_0(\text{Cap}M), \beta_1(M) = \beta_1(\text{Cap}M)$  である。

ここで  $\text{Cap}M$  を二つ用意し、それらを境界上の恒等写像で貼り合わせて得られる閉 3 次元多様体を  $W(\text{Cap}M)$  と書く。閉 3 次元多様体のオイラー標数は 0 なので、  $0 = \chi(W(\text{Cap}M)) = \chi(\text{Cap}M) + \chi(\text{Cap}M) - \chi(\partial\text{Cap}M)$  である。よって  $\chi(\text{Cap}M) = \frac{1}{2}\chi(\partial\text{Cap}M)$  を得る。しかも仮定より  $\chi(\partial\text{Cap}M) \leq 0$  なので、  $\chi(\text{Cap}M) \leq 0$  である。ここで、オイラー・ポアンカレ関係式 (定理 1.6) より、  $\chi(\text{Cap}M) = \beta_0(\text{Cap}M) - \beta_1(\text{Cap}M) + \beta_2(\text{Cap}M) - \beta_3(\text{Cap}M)$  なので、  $0 \geq \beta_0(M) - \beta_1(M) + \beta_2(\text{Cap}M)$  であり、  $\beta_0(M) \geq 1$  より  $\beta_1(M) \geq \beta_0(M) + \beta_2(\text{Cap}M) \geq 1$  を得る。すなわち  $H_1(M; \mathbf{Z})$  は無限巡回群を部分群に持ち、補題の証明が終わる。  $\square$

命題 13.9 と補題 13.10 より、  $\partial M$  が 2 次元球面以外の連結成分をもつならば、  $M$  は非分離的両側圧縮不可能曲面をもつことがわかる。そしてもう少し細かい議論をすると、次の命題に述べるような曲面が存在することがわかる。証明は [11] を参照されたい。

**命題 13.11**  $M$  をコンパクトな向き付け可能 3 次元多様体とする。  $\partial M$  が 2 次元球面以外の連結成分をもつならば、  $M$  に適切に埋め込まれた非分離的両側圧縮不可能曲面  $F$  で、  $\partial F \neq \emptyset$  であり、  $\partial F$  が  $\partial M$  における非分離的単純閉曲線となるものが存在する。

### 13.4 ハーケン多様体とワルトハウゼンの定理

本節において、両側圧縮不可能曲面を含む既約 3 次元多様体の位相形は、その基本群で決まるというワルトハウゼンの結果を紹介する。これが本章の始めに述べた、圧縮不可能曲面は、それを含む 3 次元多様体の位相形に大きな影響を与えるという意味である。この結果の証明には、多様体の階層というものをを用いる。階層という言葉は、11 章において曲面に対して定義したが、基本的には同様の概念である。そしてそのような階層の存在を示すために、コンパクトな 3 次元多様体が含む圧縮不可能曲面の数は有限個であるという、ハーケンの結果を紹介する。

$M$  を 3 次元多様体とし、  $F$  と  $G$  を  $M$  に適切に埋め込まれた互いに交わらない曲面とする。  $F \times I$  の  $M$  への埋め込みで、  $F \times \{0\} = F, F \times \{1\} = G$  であり、  $(F \times I) \cap \partial M = \partial F \times I$  をみたすものがあるとき、  $F$  と  $G$  は平行、または互いに平行という。

**補題 13.12** (ハーケンの有限性定理 [Ha1])  $M$  をコンパクトな向き付け可能既約 3 次元多様体とする。このとき、次の条件 (\*) をみたす自然数  $n(M)$  が存在する。

(\*)  $M$  に適切に埋め込まれた互いに交わらない連結な両側圧縮不可能曲面  $S_1, S_2, \dots, S_k$  に対して、  $k > n(M)$  ならば、これらの曲面の中に、互いに平行となるものが存在する。

**証明の概略**  $K$  を  $M$  のある 3 角形分割とする。このとき一般の位置の議論より、  $S_1, S_2, \dots, S_k$  は  $K$  の頂点とは交わず、  $K$  の 1 次元単体とは有限個の点で交わり、また  $K$  の 2 次元単体とは有限個の弧または円周で交わりとしてよい。さらに  $S_1, S_2, \dots, S_k$  が

圧縮不可能であることと  $M$  が既約であることにより、 $M$  のアンビエントイソトピーによって、 $S_1, S_2, \dots, S_k$  と  $K$  の 2 次元単体との交わりは弧だけであり、 $K$  の 3 次元単体との交わりの連結成分は、図 13.3 に描かれた五つの 2 次元円板の一つとしてよい。よって  $K$  の 3 次元単体全体の数の 6 倍に、さらに補正的な値を加えた数を  $n(M)$  とすれば、これが補題の条件 (\*) をみたすことが示される。  $\square$

さて、 $M$  および  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n, n+1$ ) をコンパクトな向き付け可能 3 次元多様体とし、 $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を  $M_i$  に適切に埋め込まれた (連結な) 両側圧縮不可能曲面とする。これらの組の列  $(M_1, F_1), (M_2, F_2), \dots, (M_n, F_n)$  が次の条件 (1), (2), (3) をみたすとき、この列を  $M$  の階層という。

- (1)  $M = M_1$
- (2)  $M_{i+1}$  は  $M_i$  を  $F_i$  に沿って切り開いて得られる 3 次元多様体 ( $i = 1, 2, \dots, n$ )
- (3)  $M_{n+1}$  の連結成分はすべて 3 次元球体

次の定理は、境界をもつ 3 次元多様体に対して、階層の存在を保証するものである。

**定理 13.13 ([Wa1])**  $M$  をコンパクトな向き付け可能既約 3 次元多様体とする。ただし 3 次元球体ではないとする。 $\partial M \neq \emptyset$  ならば、 $M$  の階層  $(M_1, F_1), (M_2, F_2), \dots, (M_n, F_n)$  で、各  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して、 $\partial F_i \neq \emptyset$  であり、 $M_i$  および  $M_{n+1}$  が連結であるようなものが存在する。

**証明**  $M_1 = M$  とする。 $\partial M_1$  の連結成分に 2 次元球面があれば、 $M_1$  の既約性から  $M_1$  は 3 次元球体であり、仮定に反する。よって  $\partial M_1$  の連結成分には 2 次元球面はない。

$\partial M_1$  の連結成分で圧縮可能なものがあれば、その圧縮円板を  $F_1$  とする。圧縮可能なものがなければ、命題 13.11 によって存在が保証されている非分離的両側圧縮不可能曲面を  $F_1$  とする。このようにして  $\partial M_i$  の連結成分で、圧縮可能なものがあるか否かによって、圧縮円板または命題 13.11 における圧縮不可能曲面を  $F_i$  とし、 $M_i$  を  $F_i$  で切り開いて得られる 3 次元多様体を  $M_{i+1}$  とすることにより、コンパクトな向き付け可能 3 次元多様体と適切に埋め込まれた両側圧縮不可能曲面の組の列  $(M_1, F_1), (M_2, F_2), \dots$  を得る。

今、この列が無限に続いたとする。ある  $M_i$  において  $\partial M_i$  の連結成分がすべて 2 次元球面ならば、問題 13.8 より  $M_i$  は既約なので、 $M_i$  の連結成分はすべて 3 次元球体となる。したがって、この列が無限に続くためには、各  $M_i$  において  $\partial M_i$  の連結成分で 2 次元球面でないものが存在する。よって  $\eta(\cdot)$  を補題 13.7 の証明において曲面に対して定義した値とし、 $\eta(\partial M_i)$  を  $\partial M_i$  のすべての連結成分に対する  $\eta(\cdot)$  の総和とすると、 $\eta(\partial M_i) > 0$  である。

$F_1, F_2, \dots$  の中で、2 次元円板でないものを  $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots$  とする。ここで、これらの 2 次元円板でないものが有限個であると仮定し、最後のものを  $F_{i_k}$  とする。このとき  $F_{i_{k+1}}, F_{i_{k+2}}, \dots$  はすべて 2 次元円板なので、 $\eta(\partial M_{i_{k+1}}) > \eta(\partial M_{i_{k+2}}) > \dots$  である。よってある  $\ell$  において  $\eta(\partial M_\ell) = 0$  となり、この列は長さ  $\ell$  で終了する。これはこの列が無限に続くとした仮定に矛盾する。ゆえに、2 次元円板でないものが無限個存在し、それらを  $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots$  とする。

$(F_{i_j}, \partial F_{i_j}) \subset (M_{i_j}, \partial M_{i_j})$  であり、 $\partial F_{i_j} \neq \emptyset$  なので、 $\partial F_{i_j}$  と交わる  $\partial M_{i_j}$  の連結成分の

一つを  $\text{Int}M_{i_j}$  へ押し込んだものを  $G_{i_j}$  とする。 $G_{i_j}$  が圧縮可能ならば、 $F_{i_j}$  のかわりに 2 次元円板を採用できるので、 $F_{i_j}$  が 2 次元円板ではないことから、 $G_{i_j}$  は  $M_{i_j}$  における両側圧縮不可能曲面である。ここで、 $n(M)$  を補題 13.12 における自然数とする。 $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots$  は無限に続くとしているので、 $k > n(M)$  とし、 $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_k}$  について考える。このときこれらの作り方から、 $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_k}$  は  $M$  内の両側曲面である。ここでさらに問題 13.9 より、これらは互いに交わらない  $M$  の圧縮不可能曲面である。したがって補題 13.12 より、ある  $s, t$  ( $s < t$ ) に対して、 $G_{i_s}$  と  $G_{i_t}$  は平行となる。ところが  $G_{i_s}$  は  $M_{i_s}$  に含まれ  $F_{i_s}$  によって切り開かれるため、 $G_{i_t}$  と平行にはなりえない。この矛盾により、はじめの列の構成は有限の長さで終了することが示された。

以上の議論により構成された有限の列を  $(M_1, F_1), (M_2, F_2), \dots, (M_n, F_n)$  とする。命題 13.11 より  $\partial M_{n+1}$  の連結成分はすべて 2 次元球面であり、 $M_{n+1}$  の既約性から  $M_{n+1}$  の連結成分はすべて 3 次元球体である。したがってこれは  $M$  の階層である。

次に、 $M_{n+1}$  が二つ以上の連結成分をもつとする。このとき、 $F_1, F_2, \dots, F_n$  の作り方より、これらの曲面の中に分離的 2 次元円板が存在する。よって、それらのうちの最後のものを  $F_j$  とする。 $\partial M_{j+1}$  上に残った  $F_j$  の切り口 (二つの 2 次元円板) を  $F'_j, F''_j$  とすると、 $j$  より大きい  $k$  に対して、 $F_k \cap (F'_j \cup F''_j) = \emptyset$  とできるので (問題 13.10)、 $F'_j \cup F''_j \subset \partial M_{n+1}$  である。しかも  $F'_j, F''_j$  は  $M_{n+1}$  の異なる連結成分に含まれる。したがって、それらの二つの連結成分を  $F'_j$  と  $F''_j$  によって貼り合わせることににより、 $M_{n+1}$  から個数が一つだけ少ない 3 次元球体の集まりが得られる。よって  $F_1, F_2, \dots, F_n$  から  $F_j$  をとり除いた曲面の列によって、長さが一つ短く、最後に現れる 3 次元球体の数も一つ少ない  $M$  の階層が得られる。この操作を繰り返すことにより、 $F_1, F_2, \dots, F_n$  がすべて非分離的であり、 $M_{n+1}$  が一つの 3 次元球体であるような  $M$  の階層が得られ、定理の証明が終わる。  $\square$

**問題 13.8**  $M$  が既約 3 次元多様体であり、 $F$  が  $M$  に適切に埋め込まれた両側圧縮不可能曲面とすると、 $M$  を  $F$  で切り開いて得られる 3 次元多様体も既約であることを示せ。

**問題 13.9** 定理 13.13 の証明において、 $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_k}$  は  $M$  における互いに交わらない曲面としてよいことを示せ。またこれらがすべて  $M$  で圧縮不可能であることを示せ。

**問題 13.10** 定理 13.13 の証明において、 $F_k \cap (F'_j \cup F''_j) = \emptyset$  とできることを示せ。

$M, N$  を二つのコンパクトな 3 次元多様体とし、 $\partial M, \partial N$  の連結成分をそれぞれ  $\partial M = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m$ ,  $\partial N = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$  とおく。また、 $r_i : \pi_1(F_i) \rightarrow \pi_1(M)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ),  $s_j : \pi_1(G_j) \rightarrow \pi_1(N)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) をそれぞれ包含写像から導かれる準同形とする。このとき、準同形  $\phi : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$  が次の条件 (\*) をみたすとき、 $\phi$  は周辺構造を保存するという。

(\*) 各  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) に対して, ある  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) と準同形  $\psi_i : \pi_1(F_i) \rightarrow \pi_1(G_j)$  および  $\pi_1(N)$  の内部自己同形  $\alpha_j : \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(N)$  で, 次の等式をみたすものが存在する (図 13.5)。

$$\phi \circ r_i = \alpha_j \circ s_j \circ \psi_i : \pi_1(F_i) \rightarrow \pi_1(N)$$

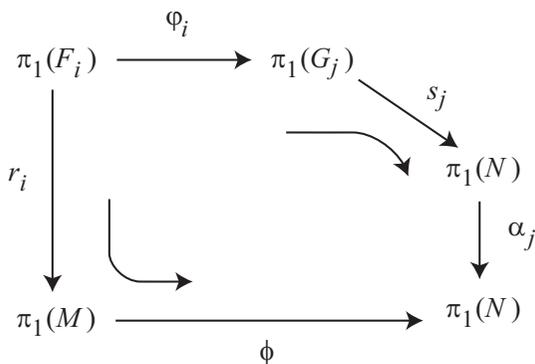


図 13.5

上記の定義において,  $\pi_1(N)$  の内部自己同形  $\alpha_j$  は, 基点の取りかえに対応するものであり, それは  $\pi_1(M)$  と  $\pi_1(N)$  の基点を常に固定して考えていることによる。次の補題の証明は省略するが, 補題 13.8 と同様の方法で示すことができる。

**補題 13.14**  $M, N$  を二つのコンパクトな 3 次元多様体とし,  $\pi_2(N)$  は自明な群であるとする。このとき, 周辺構造を保存する任意の準同形写像  $\phi : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$  に対して, 連続写像  $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$  で  $f_* = \phi$  となるものが存在する。

次が, 本節の目標であるワルトハウゼンの定理である。

**定理 13.15 ([Wa1])**  $M, N$  を二つのコンパクトな向き付け可能既約 3 次元多様体とし,  $M, N$  はともに適切に埋め込まれた両側圧縮不可能曲面をもつとする。各  $\psi_i$  が単射であり,  $\pi_1(M)$  と  $\pi_1(N)$  の間に, 周辺構造を保存する同形写像  $\phi : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$  があるならば, 同相写像  $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$  で,  $f_* = \phi$  となるものが存在する。

**証明の概略**  $\partial N \neq \emptyset$  のときは, 定理 13.13 により  $N$  の階層が存在する。また  $\partial N = \emptyset$  のときも,  $N$  が含む両側圧縮不可能曲面で  $N$  を切り開いて得られる 3 次元多様体に対して, 定理を適用する。すなわち, いずれにしても  $N$  の階層が存在するので, それを  $(N_1, G_1), (N_2, G_2), \dots, (N_n, G_n)$  とする。ここで  $N = N_1$  であり,  $N_{n+1}$  は一つまたは二つの 3 次元球体である ( $\partial N = \emptyset$  かつ  $G_1$  が分離的であるとき,  $N_{n+1}$  は二つの 3 次元球体となる)。

補題 13.14 より連続写像  $f : (M, \partial M) \rightarrow (N_1, \partial N_1)$  で,  $f_* = \phi$  となるものが存在する。ここで  $G_1$  は  $N_1$  に適切に埋め込まれた両側圧縮不可能曲面であり,  $N_1$  は既約なので,  $\pi_2(N_1), \pi_2(N_2)$  はともに自明な群である。よって補題 13.7 の証明を一般化することにより,

連続写像  $f_1 : (M, \partial M) \rightarrow (N_1, \partial N_1)$  で,  $f_{1*} = f_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N_1)$  であり,  $f_1^{-1}(G_1)$  の連結成分はすべて  $M$  に適切に埋め込まれた両側圧縮不可能曲面となるものが得られる。

ここでさらに各  $\psi_i$  が単射であることから, ホモトピーで変形することにより, 各  $F_i$  上で  $f_1|_{F_i} : F_i \rightarrow G_j$  は被覆射影としてよい。

定理は,  $N$  の階層の長さ  $n$  についての数学的帰納法によって示される。

$n = 1$  のとき. 問題 13.11 より  $N_2$  は 3 次元球体であり,  $G_1$  は 2 次元円板なので,  $N_1$  はトーラス体である。したがって, 定理 12.8 と同様の議論により  $M$  もトーラス体となり, 定理の結論が成り立つ。

$n > 1$  のとき.  $N$  の階層の長さが  $n$  より短いものに対しては定理の結論が成り立つと仮定する。 $Q$  を  $N_2$  の一つの連結成分とし,  $P$  を  $f_1^{-1}(Q)$  の一つの連結成分とする。 $P$  は  $M$  を,  $f_1^{-1}(G_1)$  で切り開いて得られる 3 次元多様体の一つの連結成分である。このとき  $f_1|_P : P \rightarrow Q$  に対して,  $(f_1|_P)_* : \pi_1(P) \rightarrow \pi_1(Q)$  はその周辺構造を保存し, 各境界上で単射であるような同相写像となる。 $Q$  は長さが  $n$  より短い階層をもつので, 帰納法の仮定より  $P$  と  $Q$  は同相となる。しかも  $f_1^{-1}(G_1)$  と  $G_1$  の圧縮不可能性から, その同相写像として  $\partial P$  上にある  $f_1^{-1}(G_1)$  による切り口を,  $\partial Q$  上にある  $G_1$  による切り口へ写すものが得られる。したがって, その同相写像は  $M$  から  $N_1$  への同相写像へと拡張し, 定理の証明が終わる。□

**問題 13.11** 定理 13.15 の証明の概略において,  $n = 1$  のとき,  $N_2$  は 3 次元球体であり,  $G_1$  は 2 次元円板であることを示せ。

**系 13.16**  $M, N$  を二つの向き付け可能既約閉 3 次元多様体とする。 $M, N$  がともに両側圧縮不可能曲面を含み,  $\pi_1(M)$  と  $\pi_1(N)$  が同形ならば,  $M$  と  $N$  は同相である。

$M$  をコンパクトな向き付け可能既約 3 次元多様体とする。 $M$  が両側圧縮不可能曲面を含むとき, このような曲面について深く研究したハーケンにちなんで ([Ha1]),  $M$  をハーケン多様体とよぶことがある。この言葉を用いると, ワルトハウゼンの結果 (定理 13.15) は次のように述べることができる。

“ハーケン多様体の位相形は, その基本群で決まる。”

## 第14章

# 自由群と自由積

本章において、基本群が自由群であるか、または二つの群の自由積になっているような3次元多様体について考察する。そしてある条件のもとに、前者の場合は、 $S^2 \times S^1$  かまたはハンドル体となり、後者の場合は、二つの3次元多様体の連結和となる。特に後者の結果は、クネーザー予想とよばれていたものである。

### 14.1 自由群を基本群にもつ3次元多様体

**命題 14.1**  $M$  をコンパクトな向き付け可能既約3次元多様体とする。 $\partial M \neq \emptyset$  であり、 $\pi_1(M)$  が自由群ならば、 $M$  はハンドル体である。

**証明**  $\partial M$  の連結成分に2次元球面があるとす。このとき  $M$  は既約なので、 $M$  は3次元球体である。よってハンドル体である。

次に、 $\partial M$  の連結成分に2次元球面はないとし、 $\partial M$  のある連結成分を  $F$  とする。 $F$  は種数が1以上の向き付け可能閉曲面なので、 $\pi_1(F)$  は自明な群ではなくまた自由群でもない。包含写像  $i: F \rightarrow M$  から導かれる準同形を  $i_*: \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$  とする。 $i_*$  が単射とすると、 $\pi_1(F)$  は  $\pi_1(M)$  の部分群なので、「自由群の部分群は自由群である」というニールセン・シュライアーの定理より、 $\pi_1(F)$  も自由群となる。これは矛盾であり、 $i_*$  は単射ではない。

したがって、系 12.3 より、 $M$  に適切に埋め込まれた2次元円板  $D$  で、 $D \cap \partial M = D \cap F = \partial D$  であり、 $\partial D$  が  $F$  における本質的単純閉曲線となるものが存在する。

$D$  が  $M$  で非分離的なき、 $M$  を  $D$  で切り開いて得られる3次元多様体を  $M'$  とする。また  $D$  が  $M$  で分離的なきは、 $M$  を  $D$  で切り開いて得られる3次元多様体を  $M_1, M_2$  とする。このとき、 $M', M_1, M_2$  はすべて既約多様体であり、 $\pi_1(M'), \pi_1(M_1), \pi_1(M_2)$  はすべて自由群である (問題 14.1)。

ここで、 $\partial M$  の連結成分の種数の和を  $g$  とし、命題を  $g$  についての数学的帰納法で示す。 $\partial M$  に2次元球面はないので、 $g > 0$  である。

$g = 1$  のとき。 $\partial M$  はトーラスである。このとき  $D$  は  $M$  において非分離的であり、 $\partial M'$  は2次元球面である。よって  $M'$  の既約性から  $M'$  は3次元球体となり、 $M$  はトーラス体である。すなわち種数1のハンドル体である。

$g > 1$  とする。また命題の仮定をみたし、境界の種数の和が  $g$  より小さい3次元多様体は、すべてハンドル体とする。

$\partial M', \partial M_1, \partial M_2$  の各連結成分の種数の和を、それぞれ  $g', g_1, g_2$  とすると、 $\partial D$  が  $F$  で本質的であることから、 $g' < g, g_1 < g, g_2 < g$  である。このとき帰納法の仮定から、 $M', M_1, M_2$  はすべてハンドル体である。したがって  $M$  の作り方から  $M$  はハンドル体となり、命題の証明が終わる。  $\square$

**問題 14.1** 命題 14.1 の証明において、 $M', M_1, M_2$  はすべて既約であることを示せ。また、系 7.2 と自由群の部分群は自由群であることを用いて、 $\pi_1(M'), \pi_1(M_1), \pi_1(M_2)$  はすべて自由群であることを示せ。

**補題 14.2**  $M$  をコンパクトな向き付け可能既約 3 次元多様体とする。 $\pi_1(M)$  が自明でない自由群ならば、 $\partial M \neq \emptyset$  である。

**証明** 球面定理より  $\pi_2(M)$  は自明な群である。次に、 $\tilde{M}$  を  $M$  の普遍被覆空間とすると、 $\pi_1(\tilde{M})$  は自明な群である。また  $\pi_2(\tilde{M}) \cong \pi_2(M)$  より、 $\pi_2(\tilde{M})$  も自明な群である。したがって、「弧状連結な位相空間  $X$  において、 $1 \leq k < n$  となる任意の  $k$  に対して  $\pi_k(X) \cong \{0\}$  ならば、 $\pi_n(X) \cong H_n(X; \mathbf{Z})$  である」というフレビッツの定理を用いると、 $\pi_3(\tilde{M}) \cong H_3(\tilde{M}; \mathbf{Z})$  となる。

また仮定より、 $\pi_1(M)$  は無限群なので、 $\tilde{M}$  はコンパクトではない 3 次元多様体である。よって  $H_3(\tilde{M}; \mathbf{Z})$  は自明な群であり、 $\pi_3(\tilde{M})$  も自明な群である。さらに  $\tilde{M}$  は 3 次元多様体なので、 $k \geq 4$  のとき  $H_k(\tilde{M}; \mathbf{Z})$  は自明な群である。したがって再びフレビッツの定理より、 $k \geq 4$  のとき  $\pi_k(\tilde{M})$  は自明な群である。よって  $k \geq 2$  のとき、 $\pi_k(\tilde{M}) \cong \pi_k(M)$  であることに注意すると、 $\pi_k(M)$  は  $k = 1$  のとき自明ではない自由群であり、 $k \geq 2$  のときは自明な群となる。

ここで、 $\pi_1(M)$  の階数を  $r \geq 1$  とし、 $r$  個の  $S^1$  を 1 点でくっつけて得られる図形を  $X$  とする (図 14.1)。

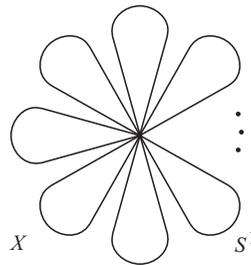


図 14.1

このとき  $\pi_1(X) \cong \pi_1(M)$  である。また  $X$  の普遍被覆空間を  $\tilde{X}$  とすると、 $\tilde{X}$  は 1 点に可縮なので、 $k \geq 2$  のとき  $\pi_k(X) \cong \pi_k(\tilde{X})$  は自明な群である。よって任意の  $k \geq 1$  に対して、 $\pi_k(M) \cong \pi_k(X)$  である。ここで、二つの弧状連結な位相空間の間に、すべての次元のホモトピー群の同形を与える連続写像があるならば、それはホモトピー同値写像であることより、 $M$  と  $X$  はホモトピー同値となる。

したがって  $H_3(M; \mathbf{Z}) \cong H_3(X; \mathbf{Z})$  を得る。ここで  $X$  は 1 次元複体であることから、

$H_3(X; \mathbf{Z})$  は自明な群である。よって  $H_3(M; \mathbf{Z})$  は自明な群となり、 $M$  がコンパクトであることから、 $\partial M \neq \emptyset$  である。  $\square$

以上により、本節の目標である次の定理が得られる。

**定理 14.3**  $M$  をコンパクトで素な向き付け可能 3 次元多様体とする。 $\pi_1(M)$  が自明でない自由群ならば、 $M$  は  $S^2 \times S^1$  かまたはハンドル体である。

**証明**  $M$  が既約でないとき。補題 10.7 より  $M$  は  $S^2 \times S^1$  である。

$M$  が既約のとき。補題 14.2 より  $\partial M \neq \emptyset$  である。よって命題 14.1 より  $M$  はハンドル体である。  $\square$

## 14.2 クネーザー予想

本節において、クネーザー予想とよばれた定理を示す。その前に補題を一つ準備する。

**補題 14.4** 任意の有限表示群  $G$  に対して、単体的複体  $X$  で、 $\pi_1(X) \cong G$  であり、 $\pi_2(X)$  は自明な群となるものが存在する。

**証明**  $G$  は有限表示群なので、生成元の数を  $n$ 、関係式の数を  $m$  とする表示  $G \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$  をもつ。 $n$  個の  $S^1$  を 1 点でくっつけて得られる図形を  $X_1$  とし (図 14.1)、 $D_1, D_2, \dots, D_m$  を  $m$  個の 2 次元円板とする。 $\pi_1(X_1)$  は階数  $n$  の自由群となるので、群  $G$  の上記の表示における関係式を実現する写像を、

$$f_1 : \partial D_1 \rightarrow X_1, f_2 : \partial D_2 \rightarrow X_1, \dots, f_m : \partial D_m \rightarrow X_1$$

とする。そして、 $X_1$  と  $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_m$  から  $f_1, f_2, \dots, f_m$  によって対応する点を同一視して得られる図形を  $X_2$  とおく。このとき  $\pi_1(X_2) \cong G$  となるので、 $\pi_2(X_2)$  が自明な群ならば  $X = X_2$  とする。

$\pi_2(X_2)$  が自明な群でないとき。 $X_2$  はコンパクトなので、 $\pi_1(X_2)$  を法として、 $\pi_2(X_2)$  は有限生成群である。よって  $\pi_2(X_2)$  が  $\pi_1(X_2)$  を法として  $\ell$  個の元から生成されるとし、 $B_1, B_2, \dots, B_\ell$  を  $\ell$  個の 3 次元球体とする。また

$$g_1 : \partial B_1 \rightarrow X_2, g_2 : \partial B_2 \rightarrow X_2, \dots, g_\ell : \partial B_\ell \rightarrow X_2$$

を、 $\pi_2(X_2)$  の  $\pi_1(X_2)$  を法とした生成元を表す写像とする。そして、 $X_2$  と  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_\ell$  から  $g_1, g_2, \dots, g_\ell$  によって対応する点を同一視して得られる図形を  $X$  とおく。このとき、 $\pi_1(X) \cong G$  であり、 $\pi_2(X)$  は自明な群である。また作り方から  $X$  は単体的複体としての構造をもつ。  $\square$

**定理 14.5 (クネーザー予想)**  $M$  をコンパクトな向き付け可能 3 次元多様体とし、 $\partial M$  は、空集合かまたは有限個の圧縮不可能曲面とする。 $\pi_1(M)$  が自明ではない二つの群  $G_1, G_2$  によって、 $\pi_1(M) \cong G_1 * G_2$  と表されるならば、二つの 3 次元多様体  $M_1, M_2$  によって  $M \cong M_1 \# M_2$  であり、 $\pi_1(M_1) \cong G_1, \pi_1(M_2) \cong G_2$  となる。

**証明** 補題 14.4 によって単体的複体  $X_1, X_2$  で、 $\pi_1(X_i) \cong G_i$  であり、 $\pi_2(X_i)$  は自明な

群 ( $i = 1, 2$ ) となるものが存在する。 $x_1, x_2$  をそれぞれ  $X_1, X_2$  のある頂点とし、 $x_1$  と  $x_2$  を 1 次元単体  $A$  でつないで得られる単体的複体を  $X = X_1 \cup A \cup X_2$  とする。このとき、 $\pi_1(X) \cong G_1 * G_2$  であり、 $\pi_2(X)$  は自明な群である。

ここで  $\pi_1(M) \cong G_1 * G_2$  より、補題 13.8 と同様の方法で、連続写像  $f : M \rightarrow X$  で、 $f_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(X)$  が同形となるものが得られる。さらに単体近似定理より、 $f$  を  $M$  と  $X$  のある 3 角形分割に関して単体写像としてよい。このとき補題 13.7 と同様の方法で、 $A$  内のある点  $y$  に対して、 $f^{-1}(y)$  の連結成分はすべて  $M$  に適切に埋め込まれた両側圧縮不可能曲面としてよい。

$F$  を  $f^{-1}(y)$  の任意の連結成分とする。 $i : F \rightarrow M$  を包含写像とすると補題 13.1 より  $i_* : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$  は単射である。また  $f_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(X)$  は同形なので、 $(f|_F)_* : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(f(F))$  も同形となる。ここで  $f(F) = y$  なので、 $\pi_1(f(F)) \cong \pi_1(y)$  は自明な群である。よって  $\pi_1(F)$  は自明な群となり、 $F$  は 2 次元円板かまたは 2 次元球面である。

**副補題 14.6**  $f$  を変形して  $f^{-1}(y)$  の連結成分はすべて 2 次元球面であるようにできる。

**証明**  $F$  が 2 次元円板であるとする。 $\partial F \subset \partial M$  であり、 $\partial M$  は圧縮不可能曲面なので、 $\partial M$  内の 2 次元円板  $D$  で、 $\partial D = \partial F$  となるものがある。このとき  $f^{-1}(y) \cap D = \partial D$  としてよい。また  $F$  は圧縮不可能曲面 (本質的 2 次元円板) なので、 $M$  内に、 $F \cup D$  を境界とする 3 次元球体は存在しない。 $A$  を点  $y$  で、 $X_1$  側と  $X_2$  側に分けたものをそれぞれ  $A_1, A_2$  とすと、 $f^{-1}(y) \cap D = \partial D$  より、 $f(D) \subset X_1 \cup A_1$  としてよい。

$D$  の  $M$  における正則近傍を  $B_1$  とし、 $\text{cl}(\partial B_1 - \partial M) = D_1$  とおく。 $D_1 \cap F$  は  $F$  において  $\partial F$  と平行な単純閉曲線である。次に  $D_1 \cap F$  を境界とするような  $D_1$  内の 2 次元円板を  $D'_1$  とし、 $D'_1$  の内部を  $\text{cl}(M - B_1)$  の中へ少し押し込んで得られる 2 次元円板を  $D_2$  とする。 $\partial D_2 = D_1 \cap F$  である。さらに  $D'_1 \cup D_2$  を境界とする 3 次元球体を  $B_2$  とおく (図 14.2)。

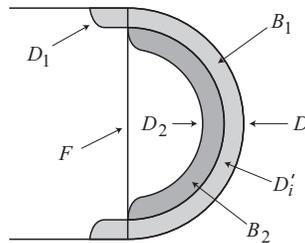


図 14.2

$f$  から新たな写像  $f_1 : M \rightarrow X$  を以下のように構成する。

$f_1|_{\text{cl}(M - (B_1 \cup B_2))} = f|_{\text{cl}(M - (B_1 \cup B_2))}$  とおく。また  $f(D) \subset X_1 \cup A_1$  より  $f(\partial D_1) \subset X_2 \cup A_2$  である。よって  $f_1(D'_1) = y$  と定めると、 $f_1|_{B_1} : B_1 \rightarrow X$  を、 $f_1(B_1) \subset X_2 \cup A_2$  であり  $(f_1|_{B_1})^{-1}(y) = D'_1$  と定めることができる。さらに  $f(D_2) \subset X_1 \cup A_1$  であり、 $(f|_{D_2})^{-1}(y) = \partial D_2$  なので、2 次元球面  $D'_1 \cup D_2$  上で  $f_1$  は  $f_1(D'_1 \cup D_2) \subset X_1 \cup A_1$  であ

り,  $(f_1|_{D'_1 \cup D_2})^{-1}(y) = D'_1$  である。したがって  $\pi_2(X_1 \cup A_1)$  が自明な群であることより,  $f_1|_{\text{cl}(M-B_2)}$  は  $B_2$  へ拡張し,  $f_1(B_2) \subset X_1 \cup A_1$  であり,  $(f_1|_{B_2})^{-1}(y) = D'_1$  となる。

よって,  $F' = (F - B_1) \cup D'_1$  とおく。このとき  $F'$  は  $M$  における本質的 2 次元球面であり,  $f_1^{-1}(y) = (f^{-1}(y) - F) \cup F'$  である。しかも  $f_{1*} : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(X)$  は同形である。ゆえに, この操作を繰り返すことにより,  $f^{-1}(y)$  の連結成分は, すべて  $M$  における本質的 2 次元球面と変形できる。□

**副補題 14.7**  $f$  をさらに変形して,  $f^{-1}(y)$  はただ一つの連結成分からなるようにできる。

**証明**  $f^{-1}(y)$  が二つ以上の連結成分をもつとする。  $\beta : I \rightarrow M$  を  $M$  内の弧で,  $\beta(0), \beta(1)$  がそれぞれ  $f^{-1}(y)$  の異なる連結成分に含まれるものとする。このとき  $f(\beta(0)) = f(\beta(1)) = y$  なので,  $f \circ \beta : I \rightarrow X$  は  $y$  を基点とする  $X$  内の閉曲線となり,  $[f \circ \beta]$  は  $\pi_1(X, y)$  の元である。  $f_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(X)$  は同形なので,  $\beta(1)$  を基点とする  $M$  内の閉曲線  $\gamma : I \rightarrow M$  で  $f_*([\gamma]) = [f \circ \beta]^{-1}$  となるものがある。よって,  $\beta$  と  $\gamma$  をつなげた曲線を  $\alpha = \beta * \gamma$  とおく。

$\alpha : I \rightarrow M$  が自己交差をもっていれば, 少しずらすことにより,  $\alpha$  は  $M$  内の弧としてよい。したがって, 次の二つの性質 (1), (2) をみたす  $M$  内の弧  $\alpha$  が得られた。

- (1)  $\alpha(0), \alpha(1)$  はそれぞれ  $f^{-1}(y)$  の異なる連結成分に含まれる
- (2)  $[f \circ \alpha]$  は  $\pi_1(X)$  において単位元

ここで上記の性質をみたす弧の中で, さらに次の性質 (3) をみたすものが存在することを示す。

$$(3) \alpha(\text{Int}I) \cap f^{-1}(y) = \emptyset$$

そのために,  $\alpha(\text{Int}I) \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$  と仮定する。  $\alpha$  は  $f^{-1}(y)$  と横断的に交わるとしてよいので,  $\alpha(\text{Int}I)$  が  $f^{-1}(y)$  と  $m$  個の点で交わる時,  $\alpha$  を次のように表すことができる。

$$\alpha = \alpha_0 * \alpha_1 * \cdots * \alpha_m \quad \text{ただし, } \alpha_i : I \rightarrow M \ (i = 1, 2, \dots, m) \text{ であり,}$$

$$\alpha_i(\text{Int}I) \cap f^{-1}(y) = \emptyset, \quad \alpha_i(\partial I) \subset f^{-1}(y)$$

よって,

$$[f \circ \alpha] = [f \circ \alpha_0] \cdot [f \circ \alpha_1] \cdots [f \circ \alpha_m] \in \pi_1(X) \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$$

であり,  $\alpha$  が  $f^{-1}(y)$  と横断的に交わることから,  $[f \circ \alpha_0], [f \circ \alpha_1], \dots, [f \circ \alpha_m]$  には,  $\pi_1(X_1)$  と  $\pi_1(X_2)$  の元が交互に現れる。ここで  $[f \circ \alpha]$  が  $\pi_1(X)$  で単位元であることに注意すると, ある  $k$  において  $[f \circ \alpha_k]$  は単位元となる。

$\alpha_k : I \rightarrow M$  に注目する。  $\alpha_k(0)$  と  $\alpha_k(1)$  が  $f^{-1}(y)$  の異なる連結成分に含まれているならば, この  $\alpha_k$  を求める  $\alpha$  とすればよい。よって,  $\alpha_k(0)$  と  $\alpha_k(1)$  が  $f^{-1}(y)$  の一つの連結成分に含まれているとし, それを  $F$  とする。また,  $\alpha_k(0)$  と  $\alpha_k(1)$  を  $F$  上で結ぶ弧を  $\beta$  とし,  $\alpha' = \alpha_0 * \cdots * \alpha_{k-1} * \beta * \alpha_{k+1} * \cdots * \alpha_m$  とおく。  $f(\beta) = y$  より  $[f \circ \alpha'] = [f \circ \alpha]$  であり,  $[f \circ \alpha']$  は  $\pi_1(X)$  の単位元である。したがって,  $\beta$  の部分を  $F$  から少し離れた単純閉

曲線を改めて  $\alpha'$  とおくと (図 14.3),  $\alpha'$  は条件 (1), (2) をみたしており, なおかつ  $f^{-1}(y)$  との交点数が,  $\alpha$  と  $f^{-1}(y)$  とのそれよりも二つ少ないものとなっている。よってこの操作を繰り返すことにより, 求める弧  $\alpha$  を得る。

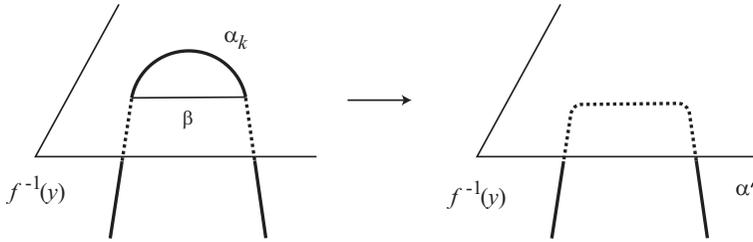


図 14.3

さて, 上記の条件 (1), (2), (3) をみたす弧  $\alpha : I \rightarrow M$  が得られたので,  $F_0, F_1$  をそれぞれ  $\alpha(0), \alpha(1)$  を含む  $f^{-1}(y)$  の連結成分とする。また,  $C$  を  $\alpha(I)$  の  $M$  における正則近傍で,  $C \cap F_0 = D_0, C \cap F_1 = D_1$  がそれぞれ 2次元円板となるようなものとする。  $A$  を  $\partial D_0 \cup \partial D_1$  を境界とする  $\partial C$  内のアニュラスとし,  $\text{Int} A$  を  $C$  の内部へ少し押し込んで得られるアニュラスを  $A'$  とする。このとき  $A \cup A'$  はトーラスであり,  $C$  内のトーラス体 ( $V$  とする) の境界となる (図 14.4)。

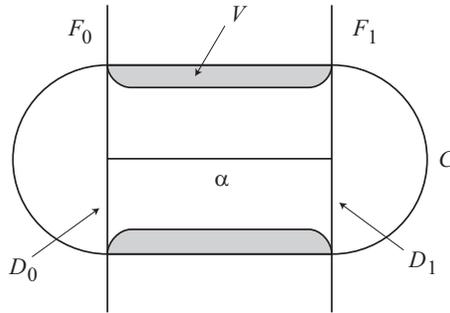


図 14.4

$f$  から連続写像  $f_1 : M \rightarrow X$  を以下のようにつくる。まず  $f_1|_{\text{cl}(M-C)} = f|_{\text{cl}(M-C)}$  とし,  $f_1(A') = y$  とする。次に  $f_1$  を  $V$  へ拡張するために,  $V$  のメリディアン円板を一つ固定し  $B$  とする。  $\partial B \cap A = \delta, \partial B \cap A' = \delta'$  とおくと  $\partial B = \delta \cup \delta'$  であり,  $f_1(A') = y$  より  $f_1(\delta') = y$  である。よって  $f(\partial B)$  は  $y$  を基点とする  $X_1$  または  $X_2$  内の (どちらか一方の) 閉曲線となる。ここで  $\delta$  は両端点を  $F_0, F_1$  上に乗せたままの変形で,  $\alpha$  にホモトピックなので,  $[f \circ \alpha]$  が  $\pi_1(X)$  において単位元であることより,  $[f_1(\partial B)]$  は  $\pi_1(X)$  で単位元である。よって  $f_1|_{\partial B}$  は  $B$  へと拡張し,  $(f_1|_B)^{-1}(y) = \delta'$  となる。

ここで,  $V$  を  $B$  で切り開いて得られる 3次元多様体は 3次元球体であり,  $\text{cl}(C - V)$  も 3次元球体であることに注意すると,  $f_1|_{\text{cl}(M-C)}$  は  $C$  全体へ拡張し,  $(f_1|_C)^{-1}(y) = A'$  となる (問題 14.2)。よって  $F' = (F_0 - D_0) \cup (F_1 - D_1) \cup A'$  とおくと,  $F'$  は  $M$  内の本質的 2次元球面であり,  $f_1^{-1}(y) = (f^{-1}(y) - (F_0 \cup F_1)) \cup F'$  である。ゆえに連続写像

$f_1 : M \rightarrow X$  で,  $f_{1*} : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(X)$  が同形であり,  $f_1^{-1}(y)$  の連結成分の数が,  $f^{-1}(y)$  のそれよりも一つ少ないものが得られた。この操作を繰り返すことにより,  $f^{-1}(y)$  が一つの連結成分からなるものが得られる。  $\square$

副補題 14.7 より,  $f^{-1}(y) = F$  とおくと,  $F$  は  $M$  内の本質的 2 次元球面である。しかも  $y$  が  $X$  を分離することから,  $F$  は  $M$  で分離的である。よって  $M \cong M_1 \# M_2$  であり,  $f_* : \pi_1(M_i) \rightarrow \pi_1(X_i)$  ( $i = 1, 2$ ) は同形となり, 定理 14.5 の証明が終わる。  $\square$

**問題 14.2** 副補題 14.7 の証明において,  $f_1|_{\text{cl}(M-C)}$  は  $(f_1|_C)^{-1}(y) = A'$  となるように  $C$  へ拡張することを示せ。

# 第15章

## $S^1$ 上の曲面束

本章において、 $S^1$  を底空間とし、曲面をファイバーとするような、ファイバー束の構造をもつ3次元多様体について学ぶ。ファイバー束の一般的な定義からは、具体的な感覚はつきみにくいかもしれないが、 $S^1$  上の曲面束は、9章で紹介した積多様体の一般化であり、曲面上の自己同相写像によって記述することができる。そして9章と同様に、そのような多様体のヒューガード分解等について学ぶ。

### 15.1 ファイバー束の定義

$E, B, F$  をそれぞれ位相空間とし、 $p: E \rightarrow B$  を連続写像とする。このとき  $B$  の開被覆  $\{U_\alpha\}$  と各  $U_\alpha$  に付随する同相写像  $\phi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$  で、 $q \circ \phi_\alpha = p$  (ただし  $q: U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha$  は第1成分への射影) をみたすものが存在するとき、これらの組  $\{E, p, B, F\}$  を、 $F$  をファイバーとするファイバー束という。またこのとき、 $E$  をこのファイバー束の全空間、 $B$  を底空間、 $p$  を射影という (図 15.1)。また、 $E$  そのものをファイバー束ということや、単に  $B$  上の  $F$  束ということもある。

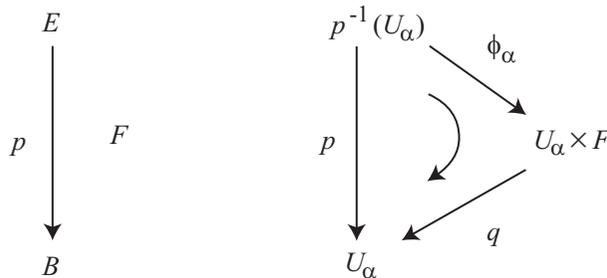


図 15.1

ファイバー束の一般的な定義は以上であるが、これ以降は、 $E, B, F$  はすべて組合せ多様体である場合のみを考え、写像はすべて PL 写像とする。次の命題の証明は省略する。

**命題 15.1**  $E$  を、 $B$  を底空間とし  $F$  をファイバーとするファイバー束とする。このとき、次の (1), (2) が成り立つ。

- (1)  $B$  が  $n$  次元多様体、 $F$  が  $m$  次元多様体のとき、 $E$  は  $n+m$  次元多様体である。
- (2)  $B$  が  $n$  次元球体のとき、 $E$  は  $B$  と  $F$  との積多様体  $B \times F$  である。

$F$  をコンパクトな曲面とする。また  $S^1$  を底空間とし、 $F$  をファイバーとするようなファイバー束を  $M$  とし、 $p: M \rightarrow S^1$  をその射影とする。このような  $M$  を、 $S^1$  上の  $F$  束または曲面束という。命題 15.1(1) より、 $M$  は 3 次元多様体となる。 $S^1$  を  $[0, 1]$  においてその両端点  $\{0\}$  と  $\{1\}$  を同一視したものと考える。 $p^{-1}(0)$  は命題 15.1(2) より、 $F$  と同相な曲面となる。さらに  $\gamma$  を、 $S^1$  における  $\{0\}$  の正則近傍とすると、命題 15.1(2) より、 $p^{-1}(\gamma)$  は  $F \times \gamma$  に同相である。よって  $p^{-1}(0)$  は  $M$  に適切に埋め込まれた  $F$  に同相な両側曲面となる。ここで、 $p^{-1}(0)$  に沿って  $M$  を切り開いて得られる 3 次元多様体を  $M'$  とすると、 $M'$  は底空間を  $[0, 1]$  とし、 $F$  をファイバーとするようなファイバー束となる。このとき命題 15.1(2) より、 $M' \cong F \times [0, 1]$  となる。ゆえに  $M$  は、 $F \times [0, 1]$  から、 $F \times \{0\}$  と  $F \times \{1\}$  を同一視して得られる 3 次元多様体となる。

以上の議論により、曲面  $F$  をファイバーとするような  $S^1$  上の曲面束は、 $F$  上のある自己同相写像  $f: F \rightarrow F$  を用いて、 $F \times [0, 1]/(x, 0) \sim (f(x), 1)$  と表すことができる。この多様体を  $M_f$  と書く。ここで、 $(x, 0) \sim (f(x), 1)$  は  $x \in F$  に対して、 $(x, 0)$  と  $(f(x), 1)$  を同一視するという意味である。またこのとき、 $f$  を貼り合わせの写像という (図 15.2)。

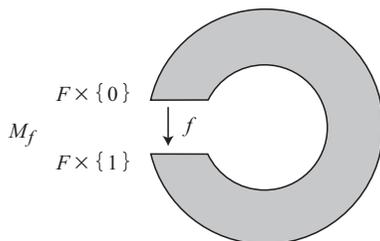


図 15.2

**補題 15.2**  $M_f, M_{f'}$  を、それぞれ  $f, f'$  を貼り合わせの写像とする  $S^1$  上の  $F$  束とする。このとき、 $f$  と  $f'$  がイソトピックならば、 $M_f$  と  $M_{f'}$  は同相である。

**問題 15.1** 補題 8.4 と同様の方法で、補題 15.2 を示せ。

補題 15.2 より、 $M_f$  の位相形は  $f$  のイソトピー類によって決まることがわかるが、さらに次が成り立つ。

**補題 15.3**  $f, g$  をコンパクトな曲面  $F$  上の自己同相写像とし、 $M_f, M_g$  をそれぞれ  $f, g$  を貼り合わせの写像とするような  $S^1$  上の  $F$  束とする。このとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1)  $f^{-1}: F \rightarrow F$  を  $f$  の逆写像とすると、 $M_f \cong M_{f^{-1}}$  である。

(2)  $F$  上の自己同相写像  $\phi: F \rightarrow F$  で、 $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$  となるものがあれば、 $M_f \cong M_g$  である。

**証明** (1) は読者に委ねる (問題 15.2)。

(2) の証明。定義より、

$$M_f = F \times [0, 1]/(x, 0) \sim (f(x), 1), \quad M_g = F \times [0, 1]/(x, 0) \sim (g(x), 1)$$

である。 $\Phi: M_f \rightarrow M_g$  を  $\Phi(x, t) = (\phi(x), t)$  と定める。ただし,  $x \in F, t \in [0, 1]$  である。  
 $0 < t < 1$  のとき,  $\Phi$  は矛盾無く定義されている。

$t = 0, 1$  のとき,  $M_f$  において,  $(x, 0) = (f(x), 1)$  であり,  $\Phi(x, 0) = (\phi(x), 0)$ ,  $\Phi(f(x), 1) = (\phi(f(x)), 1)$  である。ここで  $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$  より,  $\phi \circ f = g \circ \phi$  なので,  $(\phi(f(x)), 1) = (g(\phi(x)), 1)$  であり,  $M_g$  において,  $(\phi(x), 0) = (g(\phi(x)), 1)$  である。したがって  $\Phi(x, 0) = \Phi(f(x), 1)$  となり,  $\Phi: M_f \rightarrow M_g$  は同相写像となる。よって  $M_f \cong M_g$  である。  $\square$

**問題 15.2** 補題 15.3(1) を示せ。

補題 15.3(2) のように, 二つの写像  $f, g$  に対して,  $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$  をみたす写像  $\phi$  があるとき,  $f$  と  $g$  は共役であるという。よって貼り合わせの写像が共役ならば, できあがる曲面束は同相というわけである。

$F$  をコンパクトな曲面,  $M_f$  を  $S^1$  上の  $F$  束とし,  $p: M_f \rightarrow S^1$  をその射影とする。任意の  $t \in S^1$  に対して,  $p^{-1}(t)$  は  $F$  に同相な曲面なので,  $F_t$  と書く。これまでの議論により,  $F_t$  は  $M_f$  に適切に埋め込まれた非分離的両側曲面であるが, さらに次が成り立つ。

**補題 15.4**  $F_t$  は  $M_f$  内の圧縮不可能曲面である。

**証明**  $F_t$  が 2 次元円板かまたは 2 次元球面のとき,  $F_t$  は非分離的であることより本質的である。よって圧縮不可能である。

$F_t$  がそれ以外の曲面のとき,  $F_t$  が圧縮可能とし,  $F_t$  の圧縮円板を  $D$  とする。すなわち  $D \cap F_t = \partial D$  であり,  $\partial D$  は  $F_t$  における本質的単純閉曲線である。 $M_f$  を  $F_t$  で切り開いて得られる 3 次元多様体は,  $F_t \times I$  に同相なので,  $D \subset F_t \times I$  であり,  $\partial D \subset F_t \times \{0\}$  としてよい。よって  $\pi_1(F_t \times \{0\})$  において  $\partial D$  は単位元ではないので,  $i_*: \pi_1(F_t \times \{0\}) \rightarrow \pi_1(F_t \times I)$  は単射ではない。一方  $\pi_1(F_t \times \{0\}) \cong \pi_1(F_t \times I)$  より,  $i_*$  は同形写像である。これは矛盾であり,  $F_t$  は圧縮不可能である。  $\square$

さて,  $F_t$  が  $M_f$  における両側曲面であることより,  $M_f$  が向き付け可能であるためには, 命題 5.3 より  $F$  が向き付け可能であることが必要条件となるが, さらに次が成り立つ。

**命題 15.5**  $F$  をコンパクトな向き付け可能曲面とし,  $M_f$  を  $S^1$  上の  $F$  束とする。 $M_f$  が向き付け可能であるための必要十分条件は,  $f$  が向きを保存することである。

**証明**  $f$  が向きを保存する写像ならば,  $M_f$  の定義により,  $M_f$  は向き付け可能である。

$f$  が向きを逆にする写像とする。補題 15.2 より,  $f$  をイソトピーで動かして,  $F$  上のある点  $z$  において,  $f(z) = z$  としてよい。このとき  $C = \{z\} \times [0, 1]/(z, 0) \sim (f(z), 1)$  とおくと,  $C$  は  $M_f$  内の単純閉曲線となるが,  $f$  が向きを逆にすることより, 向きを逆にする単純閉曲線となる。よって定理 4.3 より,  $M_f$  は向き付け不可能である。この対偶を考えることにより, 命題の証明が終わる。  $\square$

ここで補題 11.3 と同様の方法で, 次を示せ。

**問題 15.3**  $F$  をコンパクトで向き付け可能な曲面とする。 $F$  が 2 次元球面でないならば、 $F \times I$  は既約多様体である。

上記の問題と補題 15.4 を用いて、次を示せ。

**問題 15.4**  $F$  をコンパクトで向き付け可能な曲面とし、 $M_f$  を向き付け可能な  $S^1$  上の  $F$  束とする。 $F$  が 2 次元球面でないならば、 $M_f$  は既約多様体である。

$F$  が 2 次元球面のとき、次節で述べるが、向き付け可能な  $S^1$  上の  $F$  束は  $S^2 \times S^1$  だけとなる。したがって補題 15.4 と問題 15.4 から、 $S^2 \times S^1$  以外の向き付け可能な  $S^1$  上の  $F$  束は、コンパクトで、既約で、しかも両側圧縮不可能曲面を含むので、ハーケン多様体である。

**問題 15.5**

- (1)  $S^1$  上の  $I$  束は、アニュラスかまたはモービウスの帯であることを示せ。
- (2)  $S^1$  上の  $S^1$  束は、トーラスかまたはクラインの壺であることを示せ。

## 15.2 曲面束の基本群とヒーガード分解

$F$  をコンパクトな曲面、 $f: F \rightarrow F$  を  $F$  上の自己同相写像とし、 $M_f = F \times [0, 1]/(x, 0) \sim (f(x), 1)$  を  $S^1$  上の  $F$  束とする。補題 15.2 より、 $f$  をイソトピーで動かして、 $F$  上のある点  $z$  において  $f(z) = z$  とできる。また、

$$K_1 = F \times [0, \frac{1}{2}] \cup \{z\} \times [\frac{1}{2}, 1]$$

$$K_2 = F \times [\frac{1}{2}, 1]$$

$$K_0 = F \times \{0\} \cup F \times \{\frac{1}{2}\} \cup \{z\} \times [\frac{1}{2}, 1]$$

とおく。このとき、 $M_f = K_1 \cup K_2$ ,  $K_1 \cap K_2 = K_0$  であり、これらはすべて連結である。 $z_0 = z \times \{0\}$  とおく。 $z_0 \in K_0$  なので、 $\pi_1(K_0)$ ,  $\pi_1(K_1)$ ,  $\pi_1(K_2)$ ,  $\pi_1(M_f)$  を、 $z_0$  を基点とする  $K_0, K_1, K_2, M_f$  の基本群とする。また、

$$\pi_1(F) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid r_1 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$$

とおく。このとき、

$$\pi_1(K_1) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, t \mid r_1 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$$

$$\pi_1(K_2) \cong \langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \mid r'_1 = 1, \dots, r'_m = 1 \rangle$$

$$\pi_1(K_0) \cong \left\langle \begin{array}{l} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \end{array} \mid \begin{array}{l} r_1 = 1, \dots, r_m = 1 \\ r'_1 = 1, \dots, r'_m = 1 \end{array} \right\rangle$$

とおくことができる。ここで、 $\alpha'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $r'_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) は、それぞれ  $\alpha_i$ ,  $r_j$  に対応している。また、 $\pi_1(K_1)$  における  $t$  は、 $\{z\} \times [0, 1]/(z, 0) \sim (f(z), 1)$  という円周に対応している。

ここで、 $i_{1*}: \pi_1(K_0) \rightarrow \pi_1(K_1)$ ,  $i_{2*}: \pi_1(K_0) \rightarrow \pi_1(K_2)$  を、それぞれ包含写像が導く準

同形とし,  $f_* : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(F)$  を,  $f$  が導く準同形とする。このとき,

$$i_{1*}(\alpha_i) = \alpha_i, \quad i_{2*}(\alpha_i) = \alpha'_i, \quad i_{1*}(\alpha'_i) = t\alpha_i t^{-1}, \quad i_{2*}(\alpha'_i) = f_*(\alpha_i)$$

より, ザイフェルト・ファンカンペンの定理 (定理 7.1) から次を得る。

**命題 15.6** 上記の記号のもとに,  $M_f$  の基本群  $\pi_1(M_f)$  は次の表示をもつ。

$$\pi_1(M_f) \cong \left\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, t \mid \begin{array}{l} r_1 = 1, \dots, r_m = 1 \\ t\alpha_1 t^{-1} = f_*(\alpha_1), \dots, t\alpha_n t^{-1} = f_*(\alpha_n) \end{array} \right\rangle$$

$F_g$  を種数  $g$  の向き付け可能閉曲面とし,  $f : F_g \rightarrow F_g$  を向きを保存する自己同相写像とする。 $S^1$  上の  $F_g$  束  $M_f$  は, 向き付け可能閉 3 次元多様体である。命題 9.2(1) より,

$$\pi_1(F_g) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$$

なので, 命題 15.6 より,  $\pi_1(M_f)$  は  $2g+1$  個の元を生成元とする表示をもつことがわかる。そしてさらに次が成り立つ。

**命題 15.7 ([O-T])**  $S^1$  上の  $F_g$  束  $M_f$  は, 種数  $2g+1$  のヒーガード分解をもつ。

**証明**  $f$  をイソトピーで動かして,  $F_g$  上のある 2 点  $z_1, z_2$  において,  $f(z_1) = z_1, f(z_2) = z_2$  としてよい。 $D_1, D_2$  をそれぞれ  $z_1, z_2$  の正則近傍で,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$  をみたますものとする。 $D_1, D_2$  はそれぞれ 2 次元円板であり,  $f(z_1) = z_1, f(z_2) = z_2$  なので, さらに  $f$  をイソトピーで動かして,  $f(D_1) = D_1, f(D_2) = D_2$  としてよい。 $M_f = F_g \times I / (x, 0) \sim (f(x), 1)$  において,

$$V_1 = \text{cl}(F_g - D_2) \times [0, \frac{1}{2}] \cup D_1 \times [\frac{1}{2}, 1]$$

$$V_2 = \text{cl}(F_g - D_1) \times [\frac{1}{2}, 1] \cup D_2 \times [0, \frac{1}{2}]$$

とおく。このとき,  $V_1, V_2$  はともに種数  $2g+1$  のハンドル体である (問題 15.6)。しかも  $M_f = V_1 \cup V_2$  であり,  $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$  より,  $(V_1, V_2)$  は,  $M_f$  の種数  $2g+1$  のヒーガード分解である。□

**問題 15.6** 命題 15.7 の証明において,  $V_1, V_2$  がともに種数  $2g+1$  のハンドル体であることを示せ (定理 9.1 の証明を参考にせよ)。

命題 15.7 より,  $S^1$  上の  $F_g$  束のヒーガード種数は  $2g+1$  以下であることがわかる。ここで  $g=0$  とし,  $M_f$  を向き付け可能な  $S^1$  上の  $F_0$  束とする。 $\pi_1(F_0)$  は自明な群なので, 命題 15.6 より  $\pi_1(M_f) \cong \langle t \mid - \rangle \cong \mathbf{Z}$  となる。よって  $M_f$  は, 基本群が無限巡回群であるような, 種数 1 のヒーガード分解をもつ多様体となる。このとき定理 8.5 と問題 8.4, 8.5 から,  $M_f \cong S^2 \times S^1$  となる。すなわち, 向き付け可能な  $S^1$  上の  $F_0$  束は,  $S^2 \times S^1$  のみということが示された。したがって, そのヒーガード種数は 1 となる (このことはまた, 補題 10.2, 15.2, 命題 15.5 からわかる)。

次に  $g > 0$  とする。 $\text{id} : F_g \rightarrow F_g$  を  $F_g$  上の恒等写像とすると,  $M_{\text{id}} \cong F_g \times S^1$  である。このとき定理 9.1 から,  $M_{\text{id}}$  のヒーガード種数はちょうど  $2g+1$  となる。しかし一般の曲面束については次が成り立つ。証明は省略する。

**定理 15.8 ([O-T])** 任意の  $g$  に対して、向き付け可能な  $S^1$  上の  $F_g$  束で、種数 2 のヒーガード分解をもつものが存在する。

【注意】 向き付け不可能な閉曲面をファイバーとするような曲面束に対しても、[Mo2] において、定理 15.8 と同様の結果が得られている。

定理 15.8 は、ヒーガード種数が 2 という多様体の、許容範囲の広さを示しているともいえる。しかし  $g > 0$  のとき、 $M_f$  が種数 1 のヒーガード分解をもつことはない。それが次の問題である。

**問題 15.7**  $g > 0$  とし、 $M_f$  を  $S^1$  上の向き付け可能  $F_g$  束とする。このとき、 $M_f$  は種数 1 のヒーガード分解を持たないことを示せ。

以上により、 $g > 0$  のとき、 $S^1$  上の向き付け可能  $F_g$  束  $M_f$  に対して、 $2 \leq g(M_f) \leq 2g+1$  という不等式が得られた。そこでさらに、与えられた貼り合わせの写像  $f$  に対して、 $g(M_f)$  を決定するという問題が考えられる。

ファイバーの種数が 0 のときは、すでに述べたように  $S^2 \times S^1$  だけなので、ヒーガード種数は 1 である。ファイバーの種数が 1 のときは、トーラス上の自己同相写像が 2 次行列を用いて記述されることより (付録参照)、トーラス束を 2 次行列で表現することができる。したがって、それらの分類とヒーガード種数の決定が、落合と高橋によってなされている ([O-T])。ファイバーの種数が 2 以上のときは、曲面上の自己同相写像の記述が難しく、このような研究はあまりなされていない。

本章の最後に、作間によって示された、任意の閉 3 次元多様体と曲面束との関係を示す結果を紹介する (証明は省略する)。

$N$  を多様体とし、 $f: N \rightarrow N$  を  $N$  上の自己同相写像とする。 $f$  が恒等写像ではなく、 $f$  と  $f$  の合成写像  $f \circ f: N \rightarrow N$  が  $N$  上の恒等写像となるとき、 $f$  を  $N$  上の対合という。 $f$  が  $N$  上の対合であるとき、任意の  $x \in N$  と  $f(x) \in N$  を同一視して得られる位相空間を  $N/f$  と書く。そして  $N/f$  が再び多様体になるとき、それを  $N$  を  $f$  で割って得られる多様体という。

**定理 15.9 ([Sa1])** 任意の向き付け可能閉 3 次元多様体は、ある向き付け可能閉曲面をファイバーとするような、 $S^1$  上の向き付け可能曲面束を、それがもつ対合で割って得られる 3 次元多様体に同相である。

この定理により、 $S^1$  上の曲面束とそれがもつ対合の研究は、すべての 3 次元多様体の研究につながる事がわかる。ファイバーがトーラスであるような  $S^1$  上の曲面束がもつ対合の研究が、[Sa1], [Sa2] においてなされている。

# 第16章

## 曲面上の $S^1$ 束

前章で  $S^1$  上の曲面束について学んだが、本章では逆に、曲面上の  $S^1$  束について学ぶ。これは曲面を底空間とし、 $S^1$  をファイバーとするようなファイバー束の構造をもつ3次元多様体である。この3次元多様体もやはり、9章で学んだ、曲面と  $S^1$  との積多様体の一般化となっている。しかし前章では、曲面  $\times S^1$  を  $S^1$  上の曲面束とみなしたのに対して、本章では曲面上の  $S^1$  束とみなす。そしてこれは、次章で学ぶザイフェルト多様体へと発展する。

### 16.1 向き付け可能な曲面を底空間とする $S^1$ 束

$B$  をコンパクトで向き付け可能な曲面、 $M$  を向き付け可能な  $B$  上の  $S^1$  束とし、 $p: M \rightarrow B$  をその射影とする。

はじめに  $\partial B \neq \emptyset$  とする。このとき、 $B$  に適切に埋め込まれた互いに交わらない有限個の本質的弧  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  で、 $B$  を一つの2次元円板  $D$  に切り開くものが存在する(図16.1)。すなわち

$$D = \text{cl}(B - (N(\alpha_1) \cup N(\alpha_2) \cup \dots \cup N(\alpha_n)))$$

である。

$A_i = p^{-1}(\alpha_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とおく。このとき、 $A_i$  は  $\alpha_i$  上の  $S^1$  束なので、命題15.1(2)より  $A_i \cong \alpha_i \times S^1$  となり、 $A_i$  は  $M$  に適切に埋め込まれた非分離的両側アニュラスとなる。 $M$  を  $A_1, A_2, \dots, A_n$  に沿って切り開いて得られる3次元多様体を  $M'$  とすると、 $M'$  は  $D$  上の  $S^1$  束となり、命題15.1(2)より  $M' \cong D \times S^1$  となる。 $\partial M' \cong \partial D \times S^1$  上にある  $A_1, \dots, A_n$  の切り口を  $A'_1, A''_1, \dots, A'_n, A''_n$  とし、 $\partial D$  上にある  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  の切り口を  $\alpha'_1, \alpha''_1, \dots, \alpha'_n, \alpha''_n$  とする(図16.1)。

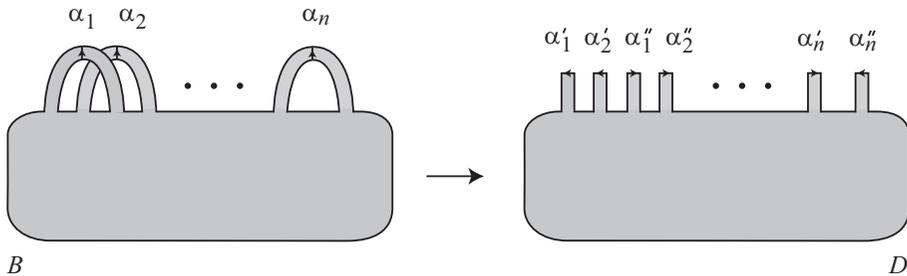


図 16.1

このとき、 $A'_i = \alpha'_i \times S^1$ ,  $A''_i = \alpha''_i \times S^1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) である。

ここで、 $B$  が  $D$  から  $\alpha'_i$  と  $\alpha''_i$  を貼り合わせて得られることより、 $M$  は  $M'$  から  $A'_i$  と  $A''_i$  を貼り合わせて得られる。したがって貼り合わせのためには、アニュラスからアニュラスへの同相写像が必要となる。そこで、次のような四つのアニュラス上の自己同相写像  $r_0, r_1, r_2, r_3$  を考える。

$(s, t) \in A = S^1 \times I = ([0, 1]/\{0\} \sim \{1\}) \times [0, 1]$  に対して、

$$r_0(s, t) = (s, t), \quad r_1(s, t) = (1 - s, t),$$

$$r_2(s, t) = (s, 1 - t), \quad r_3(s, t) = (1 - s, 1 - t)$$

$r_0$  は恒等写像であり、 $r_1, r_2$  はそれぞれ図 16.2 で示した折り返し、 $r_3$  は  $r_1$  と  $r_2$  との合成である。また  $r_0, r_3$  は向きを保存する写像であり、 $r_1, r_2$  は向きを逆にする写像である。

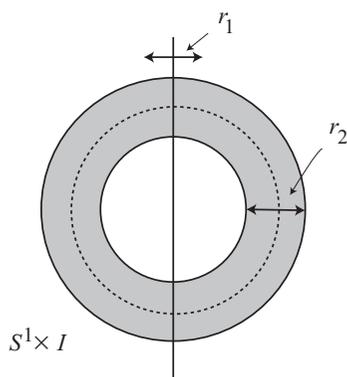


図 16.2

このとき、次が成り立つ。

**命題 16.1** 任意の  $A$  上の自己同相写像は、上記の四つのうちの一つにイソトピックである。

**証明の概略**  $f$  を  $A$  上の任意の自己同相写像とし、 $\alpha = \{0\} \times I$  とおく。 $f(\alpha)$  と  $\alpha$  との交わりを考察することにより、 $f(\alpha)$  は  $\alpha$  にアンビエントイソトピックであることがわかるので、 $f(\alpha) = \alpha$  としてよい。次に  $\alpha$  の  $A$  における正則近傍を  $N(\alpha)$  とすると、 $f(N(\alpha))$  は  $N(\alpha)$  にアンビエントイソトピックとなるので、 $f(N(\alpha)) = N(\alpha)$  としてよい。このとき、 $f|_{N(\alpha)} : N(\alpha) \rightarrow N(\alpha)$  と  $f|_{\text{cl}(A - N(\alpha))} : \text{cl}(A - N(\alpha)) \rightarrow \text{cl}(A - N(\alpha))$  に注目して、 $f$  は  $r_0, r_1, r_2, r_3$  のうちの一つにイソトピックであることを示す。またこれらの写像の変形には、定理 2.18 を用いる。□

さて、 $M'$  から  $M$  を構成することを考える。 $\alpha_i$  にはあらかじめ向きを指定しておき、 $\alpha'_i, \alpha''_i$  にはその向きから定まる向きを指定しておく。 $\partial M'$  上の各アニュラス  $A'_i = \alpha'_i \times S^1$ ,  $A''_i = \alpha''_i \times S^1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) には、 $M' \cong D \times S^1$  に指定された  $S^1$  の向きと  $\alpha'_i, \alpha''_i$  の向きによって、それぞれ向きが定まる (図 16.3)。

ここで命題 16.1 より、アニュラス上の自己同相写像は、 $S^1 \times I$  における  $S^1$  の向きと  $I$

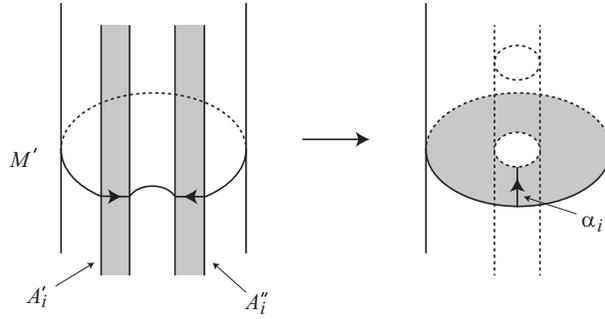


図 16.3

の向きを、それぞれ保存するか否かによって決まることがわかる。したがって、 $A_i'$  と  $A_i''$  に指定された向きに注目して貼り合わせの写像を見ると、まず  $D$  から  $B$  をつくる時、 $\alpha_i'$  と  $\alpha_i''$  は向きを保存して貼り合わせることから、 $A_i'$  と  $A_i''$  の貼り合わせにおいても、 $\alpha_i'$  と  $\alpha_i''$  の向きが一致するように貼り合わせる必要がある。また  $B$  が向き付け可能なので、 $M$  が向き付け可能であるためには、 $S^1$  の向きも保存する必要がある (問題 16.1)。ゆえに  $M' \cong D \times S^1$  という  $D$  と  $S^1$  との積構造は、 $M$  においてもそのまま保たれ、 $M \cong B \times S^1$  となる。

**問題 16.1** 上記の議論において、 $A_i'$  と  $A_i''$  を貼り合わせる場合、 $\alpha_i'$  と  $\alpha_i''$  の向きを保存し、 $S^1$  の向きを逆にすると、できあがる 3 次元多様体は向き付け不可能となることを示せ。

次に  $\partial B = \emptyset$  とする。 $B$  内に 2 次元円板を一つ指定し、それを  $E$  とする。また  $B' = \text{cl}(B - E)$ ,  $M' = p^{-1}(B')$  とおく。このとき  $p|_{M'} : M' \rightarrow B'$  は  $B'$  上の  $S^1$  束であるが、 $B'$  と  $M'$  がともに向き付け可能であり  $\partial B' \neq \emptyset$  であることから、 $\partial B \neq \emptyset$  のときの議論により、 $M' \cong B' \times S^1$  となる。また命題 15.1(2) より  $p^{-1}(E) \cong E \times S^1$  である。したがって  $M$  は、 $B' \times S^1$  と  $E \times S^1$  からその境界を貼り合わせて得られる 3 次元多様体となる。よって、 $f : \partial E \times S^1 \rightarrow \partial B' \times S^1$  をその貼り合わせの写像とすると、 $f$  はトーラスからトーラスへの同相写像であり、 $M = B' \times S^1 \cup_f E \times S^1$  である。

$\partial E, \partial B', S^1$  に向きを指定し、 $x_1 \in \partial E, y_1 \in S^1, \ell_1 = \{x_1\} \times S^1, m_1 = \partial E \times \{y_1\}$  とおく。また、 $x_2 \in \partial B', y_2 \in S^1, \ell_2 = \{x_2\} \times S^1, m_2 = \partial B' \times \{y_1\}$  とおく。さらに、 $\ell_1, m_1, \ell_2, m_2$  の  $\partial E \times S^1, \partial B' \times S^1$  におけるホモトピー類をやはり  $\ell_1, m_1, \ell_2, m_2$  と書くと、

$$\begin{aligned} \pi_1(\partial E \times S^1) &\cong \langle \ell_1 | - \rangle \oplus \langle m_1 | - \rangle \\ \pi_1(\partial B' \times S^1) &\cong \langle \ell_2 | - \rangle \oplus \langle m_2 | - \rangle \end{aligned}$$

である。ここで、 $m_1$  がトーラス体  $E \times S^1$  のメリディアンであることに注意すると、8 章のレンズ空間の場合と同様に、 $M$  の位相形は  $f(m_1)$  のホモトピー類で決まる。よって  $f(m_1) = am_2 + bl_2$  と表したとき、 $M$  の位相形は、 $(a, b)$  という互いに素な整数の組で決まる。また  $(a, b)$  と  $(-a, -b)$  からは同相な多様体を得られるので、常に  $a \geq 0$  としておく。

さて、 $M$  の  $B' \times S^1$  と  $E \times S^1$  への分解の仕方により、 $B'$  と  $E$  の任意の点  $x$  に対して、 $\{x\} \times S^1$  は  $B$  上の  $S^1$  束としての  $M$  のファイバーにならなければならない。そしてそのためには、補題 8.3 より、 $f(l_1)$  が  $l_2$  かまたは  $-l_2$  にホモトピックであることが必要十分なので、 $f(l_1) = \epsilon l_2$  (ただし  $\epsilon \pm 1$ ) となる。したがって、準同形  $f_* : \pi_1(\partial E \times S^1) \rightarrow \pi_1(\partial B \times S^1)$  を 2 次行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} f(m_1) \\ f(l_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

となる。ここでさらに  $f_*$  が同形写像であることより、この行列は整数上の可逆行列となる。よって  $\epsilon a = \pm 1$  であり、 $a \geq 0$  より  $a = 1$  を得る。ゆえに  $f(m_1) = m_2 + b l_2$  と表され、 $b$  によって  $M$  の位相形が決まることがわかる。この  $b$  を  $S^1$  束の障害類とよぶ。また、障害類を  $b$  とするような  $B$  上の向き付け可能な  $S^1$  束を、 $S(B, b)$  と書く。このとき、これまでの議論より次の命題を得る。

**命題 16.2**  $B$  をコンパクトで向き付け可能な曲面とし、 $M$  を向き付け可能な  $B$  上の  $S^1$  束とする。このとき次が成り立つ。

- (1)  $\partial B \neq \emptyset$  のとき、 $M \cong B \times S^1$ 。
- (2)  $\partial B = \emptyset$  のとき、 $M \cong S(B, b)$ 。ただし  $b$  は障害類を表す整数。また  $S(B, b) \cong S(B, -b)$  である。

**問題 16.2**  $S^2$  を 2 次元球面とするとき、 $S(S^2, b)$  はどのような多様体か考えよ。

### 16.2 向き付け不可能な曲面を底空間とする $S^1$ 束

$B$  をコンパクトで向き付け不可能な曲面、 $M$  を向き付け可能な  $B$  上の  $S^1$  束とし、 $p: M \rightarrow B$  をその射影とする。

前節と同様に、はじめに  $\partial B \neq \emptyset$  とする。このとき、 $B$  は種数  $n > 0$  の向き付け不可能閉曲面から、有限個の 2 次元円板の内部を取り除いた曲面である。よって、 $B$  の向き付け不可能曲面としての種数を  $n$  とすると (定理 3.4 参照)、 $B$  に適切に埋め込まれた互いに交わらない  $n$  本の本質的弧  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  で、 $B$  を一つの平面曲面  $Q$  に切り開くものがある (図 16.4)。

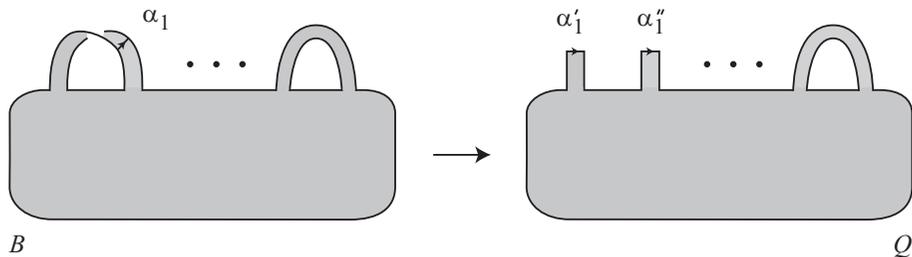


図 16.4

$p^{-1}(\alpha_i) = A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とおく。このとき、 $A_i$  は  $M$  に適切に埋め込まれた非分離の両側アニユラスである。 $M$  を  $A_1, A_2, \dots, A_n$  に沿って切り開いて得られる 3 次元多様体を  $M'$  とすると、 $M'$  は  $Q$  上の  $S^1$  束であり、 $M', Q$  とも向き付け可能である。よって、 $\partial Q \neq \emptyset$  であることから、命題 16.2(1) より、 $M' \cong Q \times S^1$  となる。

$\partial M' \cong \partial Q \times S^1$  上の  $A_i$  の切り口を  $A'_i, A''_i$  とし、 $\partial Q$  上の  $\alpha_i$  の切り口を  $\alpha'_i, \alpha''_i$  とする。また  $\alpha_i$  にはあらかじめ向きを指定しておき、 $\alpha'_i, \alpha''_i$  には、 $\alpha_i$  の向きから定まる向きを指定する。 $M$  は  $Q \times S^1$  から  $\partial Q \times S^1$  上のアニユラス  $A'_i, A''_i$  を貼り合わせて得られる 3 次元多様体であるが、 $M$  が向き付け可能であることと、 $B$  が向き付け不可能であり、 $\alpha'_i$  と  $\alpha''_i$  は向きを保存するように貼り合わされることから、 $A'_i$  と  $A''_i$  の  $S^1$  方向の向きは逆にして貼り合わされる必要がある。このようにして得られた  $M$  のことを、 $B$  上のひねり  $S^1$  束といい、 $B \tilde{\times} S^1$  と書く。すなわち  $M \cong B \tilde{\times} S^1$  である。

**問題 16.3**  $B$  上の単純閉曲線で、 $\alpha_1$  と 1 点で横断的に交わり、 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  とは交わらないものを  $\gamma$  とする。このとき  $p^{-1}(\gamma)$  は、 $M$  内の片側クラインの壺であることを示せ (図 16.5)。

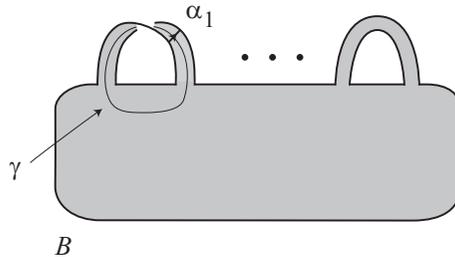


図 16.5

ここで  $M$  の構造について考えよう。 $Q \times S^1$  から  $M$  を作る時、 $A'_i$  と  $A''_i$  の  $S^1$  方向を逆にして貼り合わせたので、 $M$  は  $Q$  と  $S^1$  との積ではない。しかし  $S^1$  方向を逆にする写像とは、命題 16.1 で紹介した  $r_1$  に対応する。そしてこの  $r_1$  は、 $r_1(s, t) = (1 - s, t)$  で与えられるので、 $\{0\} \times I$  上と  $\{\frac{1}{2}\} \times I$  上では恒等写像となっている。ここで特に、 $\{0\} \times I$  上で恒等写像であることに注意すると、 $Q \times \{0\}$  は  $M$  において、 $B$  と同相な曲面に拡張する。すなわち  $c: B \rightarrow M$  という埋め込みで、 $p \circ c: B \rightarrow B$  が  $B$  上の恒等写像となるものが得られた。この写像  $c$ 、またはその像  $c(B)$  のことを、 $M$  の断面という。

一般に、ファイバー束  $\{E, p, B, F\}$  において (15 章の記号参照)、埋め込み  $c: B \rightarrow E$  で、 $p \circ c: B \rightarrow B$  が  $B$  上の恒等写像となるものがあるとき、この  $c$ 、またはその像  $c(B)$  を、ファイバー束の断面といい、 $\{E, p, B, F\}$  を断面をもつファイバー束という。 $E$  が  $B$  と  $F$  との積のときは、明らかに断面をもつ。また前節において、 $S(B, b)$  という 3 次元多様体を定義したが、 $b = 0$  のとき  $S(B, 0) \cong B \times S^1$  となり、 $S(B, 0)$  は断面をもつ。すなわち  $b$  という数は、 $S(B, b)$  が断面をもつための障害を表す値というわけである。

次に  $\partial B = \emptyset$  とする。 $B$  内に 2 次元円板を一つ指定し、それを  $E$  とする。また  $B' =$

$\text{cl}(B - E)$ ,  $M' = p^{-1}(B')$  とおく。  $M'$  は  $B'$  上の  $S^1$  束であり,  $\partial B' \neq \emptyset$  なので,  $\partial B \neq \emptyset$  の場合の議論により  $M' \cong B' \tilde{\times} S^1$  となる。また 命題 15.1(2) より,  $p^{-1}(E) \cong E \times S^1$  である。よって  $M$  は,  $B' \tilde{\times} S^1$  と  $E \times S^1$  からその境界を貼り合わせて得られる 3次元多様体である。

$\partial(E \times S^1) = \partial E \times S^1$  なので,  $x_1 \in \partial E$ ,  $y_1 \in S^1$ ,  $\ell_1 = \{x_1\} \times S^1$ ,  $m_1 = \partial E \times \{y_1\}$  とおくと,

$$\pi_1(\partial E \times S^1) \cong \langle \ell_1 \mid - \rangle \oplus \langle m_1 \mid - \rangle$$

である。また  $B' \tilde{\times} S^1$  は  $B'$  と  $S^1$  との積ではないが, 断面  $c: B' \rightarrow B' \tilde{\times} S^1$  をもつので,  $\partial(B' \tilde{\times} S^1) = \partial c(B') \times S^1$  となる。したがって  $x_2 \in \partial c(B')$ ,  $y_2 \in S^1$ ,  $\ell_2 = \{x_2\} \times S^1$ ,  $m_2 = \partial c(B') \times \{y_2\}$  とおくと,

$$\pi_1(\partial(B' \tilde{\times} S^1)) \cong \langle \ell_2 \mid - \rangle \oplus \langle m_2 \mid - \rangle$$

である。

以上より,  $f: \partial(E \times S^1) \rightarrow \partial(B' \tilde{\times} S^1)$  を貼り合わせの同相写像とすると,  $B$  が向き付け可能な場合と同様の議論により,  $f(m_1) = m_2 + b\ell_2$  (ただし  $b$  はある整数) となる。この  $b$  もやはり障害類とよび, 障害類を  $b$  とするような  $B$  上の向き付け可能  $S^1$  束を, やはり  $S(B, b)$  と書く。  $b = 0$  のときは,  $S(B, 0)$  は断面をもつので, これもやはり  $B$  上のひねり  $S^1$  束といい,  $B \tilde{\times} S^1$  と書く。すなわち  $S(B, 0) \cong B \tilde{\times} S^1$  である。よってこれまでの議論により, 命題 16.2 と同様に次を得る。

**命題 16.3**  $B$  をコンパクトで向き付け不可能な曲面とし,  $M$  を向き付け可能な  $B$  上の  $S^1$  束とする。このとき次が成り立つ。

- (1)  $\partial B \neq \emptyset$  のとき,  $M \cong B \tilde{\times} S^1$ 。
- (2)  $\partial B = \emptyset$  のとき,  $M \cong S(B, b)$ 。ただし  $b$  は障害類を表す整数。また  $S(B, b) \cong S(B, -b)$  である。

前節と本節で, コンパクトな曲面  $B$  上の  $S^1$  束について学んだが,  $\partial B = \emptyset$  のとき, それは閉 3次元多様体になる。よってそのような多様体のヒーガード分解を考えることができるが, そのことについては次章で学ぶ。

### 16.3 曲面上の $I$ 束

本節において, コンパクトな曲面を底空間とし, 単位区間をファイバーとするようなファイバー束の構造をもつ 3次元多様体について学ぶ。

$B$  をコンパクトで向き付け可能な曲面,  $I$  を単位区間,  $M$  を向き付け可能な  $B$  上の  $I$  束とし,  $p: M \rightarrow B$  をその射影とする。

$\partial B \neq \emptyset$  のとき。16.1 節と同様に,  $B$  に適切に埋め込まれた有限個の本質的な弧で,  $B$  を一つの 2次元円板に切り開くものが存在する。よって, それらの弧で  $B$  を切り開いて得られる 2次元円板を  $D$  とする。このとき命題 15.1(2) より,  $p^{-1}(D) \cong D \times I$  となる。また

$M$  が向き付け可能であることより、 $D \times I$  という積構造は  $M$  全体へ拡張し、 $M \cong B \times I$  を得る。

$\partial B = \emptyset$  のとき、 $B$  内に 2 次元円板を一つ指定し  $E$  とする。また  $B' = \text{cl}(B - E)$ ,  $M' = p^{-1}(B')$  とおく。このとき  $\partial B \neq \emptyset$  の場合の議論より、 $M' \cong B' \times I, p^{-1}(E) \cong E \times I$  である。したがって  $M$  は、 $B' \times I$  と  $E \times I$  から、アニュラス  $\partial B' \times I$  と  $\partial E \times I$  を貼り合わせて得られる 3 次元多様体である。ここで命題 16.1 より、貼り合わせの写像は 4 通り考えられるが、問題 16.4 より、どのような写像で貼り合わせても、できあがる多様体の位相形は同じなので、 $M \cong B \times I$  を得る。

**問題 16.4**  $N$  を 3 次元多様体とし、 $A$  を  $\partial N$  上のアニュラスとする。また  $D^2$  を 2 次元円板とする。このとき、 $N$  と  $D^2 \times I$  から  $A$  と  $\partial D^2 \times I$  を貼り合わせて得られる 3 次元多様体の位相形は、貼り合わせの同相写像によらないことを示せ。

**【注意】** 問題 16.4 は、実はヒューガード関式の定義において必要な命題であるが、7 章では省略した。

次に、 $B$  をコンパクトで向き付け不可能な曲面、 $M$  を向き付け可能な  $B$  上の  $I$  束とし、 $p: M \rightarrow B$  をその射影とする。

$\partial B \neq \emptyset$  のとき。前節と同様に、 $B$  に適切に埋め込まれた本質的弧  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  で、 $B$  を一つの平面曲面  $Q$  に切り開くものを考える。また  $\partial Q$  上の  $\alpha_i$  の切り口を  $\alpha'_i, \alpha''_i$  とする。 $M' = p^{-1}(Q)$  とおくと、 $M'$  は向き付け可能な  $Q$  上の  $I$  束であり、 $Q$  は向き付け可能であることから、 $M' \cong Q \times I$  となる。ここで  $D'_i = p^{-1}(\alpha'_i), D''_i = p^{-1}(\alpha''_i)$  とおくと、 $D'_i = \alpha'_i \times I, D''_i = \alpha''_i \times I$  であり、これらは  $\partial Q \times I$  上の 2 次元円板である。したがって  $M$  が向き付け可能であることから、 $M$  は  $Q \times I$  から  $D'_i$  と  $D''_i$  を、 $I$  方向を逆にして貼り合わせて得られる 3 次元多様体となる。これを  $B$  上のひねり  $I$  束といい、 $B \tilde{\times} I$  と書く。すなわち  $M \cong B \tilde{\times} I$  である。ここで  $I$  方向を逆にする写像は、 $t \in [0, 1]$  に対して  $1 - t \in [0, 1]$  を対応させる写像なので、 $\{\frac{1}{2}\}$  は不動点となる。よって  $Q \times \{\frac{1}{2}\}$  は、 $M$  において  $B$  と同相な曲面に拡張する。したがって  $M$  は、断面  $c: B \rightarrow M$  をもつファイバー束となる。

$\partial B = \emptyset$  のとき。 $B$  内のある 2 次元円板を  $E$  とし、 $B' = \text{cl}(B - E), M' = p^{-1}(B')$  とおくと、これまでの議論より、 $M' \cong B' \tilde{\times} I$  となる。また断面  $c: B' \rightarrow M'$  が存在する。したがって、 $M$  は  $M'$  と  $p^{-1}(E) \cong E \times I$  から、アニュラス  $\partial c(B') \times I$  と  $\partial E \times I$  を貼り合わせて得られる 3 次元多様体である。このとき問題 16.4 から、貼り合わせの写像によらずに  $M$  の位相形が決まる。よって、これもやはり  $B$  上のひねり  $I$  束といい、同じく  $B \tilde{\times} I$  と書く。ゆえに  $M \cong B \tilde{\times} I$  であり、 $M$  は断面をもつ。

以上より次が得られた。

**命題 16.4**  $B$  をコンパクトな曲面とし、 $M$  を向き付け可能な  $B$  上の  $I$  束とする。このとき次が成り立つ。

(1)  $B$  が向き付け可能なとき、 $M \cong B \times I$ 。

(2)  $B$  が向き付け不可能なとき,  $M \cong B \tilde{\times} I$ .

**問題 16.5**　　メービウスの帯上のひねり  $I$  束は, トーラス体に同相であることを示せ。

**問題 16.6**　　メービウスの帯上のひねり  $S^1$  束は, クラインの壺上のひねり  $I$  束に同相であることを示せ。

**問題 16.7**　　 $P^2$  を射影平面とし,  $P^3$  を射影空間とする。

(1)  $P^2$  上のひねり  $I$  束の境界は, 2次元球面であることを示せ。

(2)  $P^2$  上のひねり  $I$  束に, 3次元球体をその境界で貼り合わせたものは,  $P^3$  に同相であることを示せ (問題 13.3 参照)。

(3)  $P^2$  上のひねり  $S^1$  束は,  $P^3 \# P^3$  に同相であることを示せ。

「ガラスのクラインの壺」　4章の「鏡の中」という文章で, 向きを逆にする単純閉曲線に沿って進むと, 左右が反対になると述べた。では, 本章で紹介した向き付け不可能曲面上のひねり  $S^1$  束では, どのような現象が起こるのであろうか。たとえばこの宇宙が, 障害類=0であるようなクラインの壺上のひねり  $S^1$  束としよう。この場合, クラインの壺が宇宙の断面として含まれるので, それがガラスのような透明で堅いものでできているとする。そしてその上を, そのクラインの壺に含まれているメービウスの帯の中心線に沿って歩いてみる。このとき戻ってきたときには, その人はそのガラスの反対側に立っていることになる。つまり, ガラスに強い重力が働いているとして, お互いの靴の裏が向き合う状態となる。ただし, 向きは逆にはなっていないので, 反対側に立っている人は, 出発する前の人の鏡像ではなく, その人がガラスの向こう側の世界に入りこんだ状態である。ひねりという言葉の意味は, このように向きは保存したままで, 上下 ( $S^1$  方向) が逆転するということである。また, ガラスのクラインの壺の上を歩いた人は, クラインの壺の近傍を歩くことによって反対側にでたわけなので, このクラインの壺には表と裏が付けられないことになる (近傍が, クラインの壺  $\times I$  ではない)。したがって, このクラインの壺はこの宇宙において片側曲面である。

# 第17章

## ザイフェルト多様体

$S^1$  による葉層構造をもつ 3 次元多様体を, ザイフェルト多様体とよぶ。これは, 曲面上の  $S^1$  束の拡張になっており, 3 次元多様体論において重要な役割を果たす。本章では, このような 3 次元多様体の表現方法, 基本群の表示, ヒーガード分解等について学ぶ。そして最後に, ボアロ・チーシャンク ([B-Z]) によって発見された, 基本群の最小生成元数とヒーガード種数が一致しない例を紹介する。ザイフェルト多様体についてより詳しくは, [12], [15], [Se] 等を参照されたい。

### 17.1 ザイフェルト多様体の定義と表現

$i$  を虚数単位,  $e$  を自然対数の底,  $\theta$  を実数とし,  $D^2 = \{re^{i\theta} \mid 0 \leq r \leq 1\}$  とおく。 $D^2$  は複素平面内の 2 次元単位円板である。 $p, q$  を互いに素な整数の組とし (ただし  $p > 0$ ),  $D^2$  上の自己同相写像  $f: D^2 \rightarrow D^2$  を  $f(re^{i\theta}) = re^{i(\theta + \frac{2\pi q}{p})}$  と定める。 $f$  は  $D^2$  を, 原点を中心として  $\frac{2\pi q}{p}$  回転させる写像である。次に  $I$  を単位区間とし,  $V_{p,q} = D^2 \times I / (x, 0) \sim (f(x), 1)$  とおく。 $V_{p,q}$  は  $D^2 \times I$  において,  $(x, 0)$  と  $(f(x), 1)$  を同一視した図形であり, トーラス体である。

ここで,  $D^2 \times I$  を線分  $\{x\} \times I$  の和集合と考えよう。すなわち,  $D^2 \times I = \bigcup_{x \in D^2} \{x\} \times I$  である。そして, 各線分  $\{x\} \times I$  の  $V_{p,q}$  における状況を考えよう。そうすると,  $x$  が  $D^2$  の中心であるとき,  $f(x) = x$  なので,  $\{x\} \times I$  は  $V_{p,q}$  において 1 本の単純閉曲線 (中心線) となる。また  $x$  が  $D^2$  の中心でないとき,  $f(x) = x_1, f(x_1) = x_2, \dots, f(x_{p-1}) = x_p$  とおく。このとき  $x_p = x$  であり,  $p$  と  $q$  が互いに素であることから,  $0 < k < p$  のときは  $x_k \neq x$  である。したがって,  $p$  本の線分  $\{x\} \times I, \{x_1\} \times I, \dots, \{x_{p-1}\} \times I$  は,  $V_{p,q}$  において 1 本の単純閉曲線となる。このように  $V_{p,q}$  は, 中心の単純閉曲線の周りに, その他の単純閉曲線が  $\frac{2\pi q}{p}$  ずつ回転しながら巻き付くという構造を持っている。このような構造を含めたトーラス体  $V_{p,q}$  を,  $(p, q)$  型のファイバートーラス体といい, 各単純閉曲線をファイバーとよぶ。また中心のファイバーを,  $(p, q)$  型のファイバーとよぶ。特に  $p > 1$  のとき, 中心のファイバーを  $(p, q)$  型の特異ファイバーとよび,  $p = 1$  のとき正則ファイバーとよぶ。 $V_{p,q}$  において中心のファイバー以外は, すべて正則ファイバーである。

次に,  $V_{p,q}$  において各ファイバーを 1 点とみなした商空間を  $B$  とする。 $p = 1$  のときは  $B = D^2$  である。 $p > 1$  のとき,  $\Delta = \{re^{i\theta} \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{p}\}$  とおく。 $\Delta$  は  $D^2$  の部分集合であり, 中心角  $\frac{2\pi}{p}$  の扇形である。 $\Delta \times \{0\} \subset V_{p,q}$  なので,  $\Delta \times \{0\}$  と  $V_{p,q}$  の

各ファイバーとの交わりを見ると、扇形の二つの半径の部分は、各ファイバーとちょうど2点で交わっており、その他の部分はちょうど1点で交わっている。よって  $B$  は  $\Delta$  から二つの半径の部分を貼り合わせて得られる図形であり、位相的には2次元円板となる(図 17.1)。ここで、 $B$  の中心は  $(p, q)$  型の特異ファイバーに対応するので、 $(p, q)$  型の特異点とよび、その他の点は正則点とよぶ。

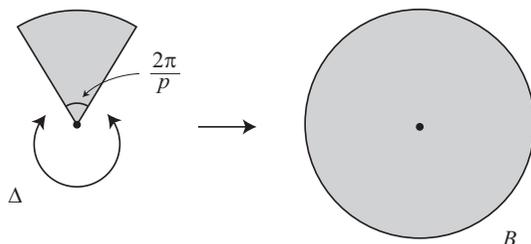


図 17.1

$M$  をコンパクトな向き付け可能3次元多様体とする。 $M$  が次の二つの条件をみたすとき、 $M$  をザイフェルト多様体という。

- (1)  $M$  は互いに交わらない単純閉曲線の和集合である。
- (2)  $M$  の各単純閉曲線は、 $M$  の単純閉曲線の和集合であるような正則近傍をもつ。しかもそれは、ある型のファイバートーラス体である。

ザイフェルト多様体  $M$  に対して、 $M$  を構成する各単純閉曲線を  $M$  のファイバーとよぶ。また、そのファイバーの近傍のトーラス体のファイバー構造が  $(1, q)$  型であるとき、それを正則ファイバーとよび、 $(p, q)$  型 (ただし  $p > 1$ ) であるとき、特異ファイバーとよぶ。また  $\partial M$  のファイバーは、すべて正則ファイバーである。

$M$  がコンパクトであることより、特異ファイバーの数は有限個なので、それらを  $s_1, s_2, \dots, s_r$  とする。各  $s_i$  の (ファイバーの和であるような) 正則近傍を  $V_i$  とし、 $M' = \text{cl}(M - (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r))$  とおく。 $M'$  の各ファイバーを1点とみなした商空間を  $B'$  とし、 $p' : M' \rightarrow B'$  をその射影とする。 $M'$  の各ファイバーの正則近傍は  $(1, q)$  型のファイバートーラス体  $V_{1,q}$  なので、 $p'$  による像  $p'(V_{1,q})$  は、特異点のない2次元円板となる。したがって、 $B'$  はこれらの2次元円板で覆われることになり、コンパクトな曲面となる。よって、 $M'$  は16章で学んだ  $B'$  上の  $S^1$  束となる。

次に、各特異ファイバー  $s_i$  の型を  $(p_i, q_i)$  とする (ただし、 $p_i > 1, i = 1, 2, \dots, r$ )。  $M$  は  $M'$  に  $(p_i, q_i)$  型のファイバートーラス体  $V_i$  を、その表面で貼り合わせて得られるものであるので、 $p'$  を  $M$  へ拡張したものを  $p$  とし、 $V_i$  の  $p$  による像を  $D_i$  とする。 $D_i$  は中心が  $(p_i, q_i)$  型の特異点であるような2次元円板である。よって  $M$  の  $p$  による像を  $B$  とすると、 $B$  は  $B'$  に  $D_1, D_2, \dots, D_r$  を貼り合わせて得られる  $r$  個の特異点をもつコンパクトな曲面となる。ゆえにザイフェルト多様体は、有限個の特異点をもつ曲面上の  $S^1$  束ということができる。

以上がザイフェルト多様体の概略であるが、以下でさらに具体的に表現する方法を考え

る。 $M$  をザイフェルト多様体とし、 $B$  を底空間、 $p: M \rightarrow B$  をその射影とする。また  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) を、 $(p_i, q_i)$  型の特異ファイバー、 $V_i$  をその (ファイバーの和であるような) 正則近傍とし、 $M' = \text{cl}(M - (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r))$ 、 $p(M') = B'$  とおく。

はじめに  $\partial B \neq \emptyset$  とする。 $\partial M'$  の連結成分で、 $\partial V_i$  と貼り合わされるトーラスを  $T_i$  とする。 $p': M' \rightarrow B'$  は  $B'$  上の  $S^1$  束なので、命題 16.2 と 16.3 より、断面  $c: B' \rightarrow M'$  をもつ。 $c(B') \cap T_i = c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) とおく。 $c_i$  は  $T_i$  上の本質的単純閉曲線である。また  $T_i$  上にある  $M'$  のファイバーを一つ指定し、 $h_i$  とおく。 $h_i$  は  $c_i$  とちょうど 1 点で横断的に交わる  $T_i$  上の本質的単純閉曲線である。

$M$  は向き付け可能なので、 $M$  の向きを一つ指定する。その向きから  $M'$  の向きが決まり、さらに  $T_i$  の向きが決まる。よって  $h_i$  と  $c_i$  の向きを、この順序によって一つ指定する。ここで、トーラス上の単純閉曲線と、それが表すホモトピー類を同じ記号で書くことにすると、以上の向きの指定により、 $\pi_1(T_i)$  の元  $h_i, c_i$  が決まり、

$$\pi_1(T_i) \cong \langle h_i \mid - \rangle \oplus \langle c_i \mid - \rangle \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

である。次に、 $V_i$  にも  $M$  から向きが決まるので、 $V_i$  を  $M'$  に貼り合わせるための写像を  $f_i: \partial V_i \rightarrow T_i$  とすると、 $f$  は向きを逆にする写像である。ここで、 $V_i$  のロンジチュードとメリディアンをそれぞれ  $\ell_i, m_i$  とし、 $V_i$  のファイバー構造が  $(p_i, q_i)$  型であることから、

$$f_i^{-1}(h_i) = p_i \ell_i + q_i m_i \in \pi_1(T_i) \cong \langle \ell_i \mid - \rangle \oplus \langle m_i \mid - \rangle$$

となるように  $\ell_i$  と  $m_i$  の向きを指定する。このとき、 $\ell_i$  と  $m_i$  の向きからこの順序によって決まる  $\partial V_i$  の向きは、 $V_i$  の向きから決まるそれと一致する (それが  $V_i$  が  $(p_i, q_i)$  型ということの定義である)。

$f_i(m_i) = \alpha_i c_i + \beta_i h_i$ 、 $f_i(\ell_i) = \gamma_i c_i + \delta_i h_i$  とおく。このとき、

$$\begin{pmatrix} f_i(m_i) \\ f_i(\ell_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i \\ h_i \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 $f_i$  は向きを逆にする写像なので、 $f_i$  が導く基本群の間の準同型写像が表す 2 次行列の行列式は  $-1$  である。しかし上記の行列は、 $h_i$  と  $c_i$ 、 $\ell_i$  と  $m_i$  の順序を逆にしているので、その行列式は 1 となる。ゆえに

$$\begin{pmatrix} f_i^{-1}(c_i) \\ f_i^{-1}(h_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_i & -\beta_i \\ -\gamma_i & \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_i \\ \ell_i \end{pmatrix}$$

であり、 $f_i^{-1}(h_i) = -\gamma_i m_i + \alpha_i \ell_i$  となる。よって

$$(*) \quad \alpha_i = p_i, \quad \beta_i q_i \equiv 1 \pmod{p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

という等式が得られた。

補題 8.4 と同様の議論により、 $M$  の位相形は、 $f_i(m_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) の  $T_i$  におけるホモトピー類で決まる。したがってそれは、上記の条件 (\*) をみたま  $(\alpha_1, \beta_1)$ 、 $(\alpha_2, \beta_2)$ 、 $\dots$ 、 $(\alpha_r, \beta_r)$  という互いに素な整数の組で決まるということになる。

ここでさらに、 $\beta_i$  は  $0 < \beta_i < \alpha_i$  とできることを示す。 $\partial B \neq \emptyset$  より、 $\partial M'$  の連結成分

で、 $\partial V_1, \partial V_2, \dots, \partial V_r$  とは貼り合わされないものがある。それを  $T_0$  とし、 $c(B') \cap T_0 = c_0$  とおく。 $\partial B'$  の連結成分で、 $T_0$  に対応するものを  $d_0$ 、 $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) に対応するものを  $d_i$  とおく。 $d_0$  上に 1 点  $x_0$  を指定し、また  $d_i$  上に 1 点  $x_i$  を指定する。さらに、 $d_0$  と  $d_i$  を  $B'$  上で結ぶ弧を  $a_i$  とする。 $p^{-1}(a_i) = A_i$  とおくと、 $A_i$  は  $M'$  に適切に埋め込まれた両側アニュラスであり、 $\partial A_i$  の二つの連結成分は、 $T_0$  と  $T_i$  に含まれる正則ファイバーである。 $a_i$  の  $B'$  における正則近傍を  $N(a_i)$  とすると、 $N(a_i) \cong a_i \times [0, 1]$  である。また、 $A_i$  の  $M'$  における正則近傍を  $N(A_i)$  とすると、 $N(A_i) \cong N(a_i) \times S^1 \cong a_i \times [0, 1] \times S^1$  である (図 17.2)。

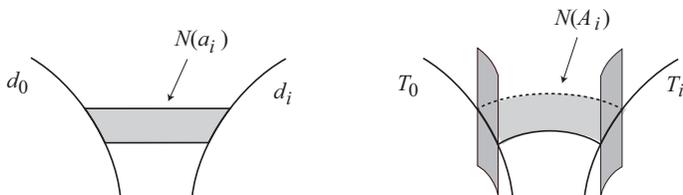


図 17.2

今、 $i$  を一つ固定し、 $N(A_i)$  を用いて、 $M'$  上の自己同相写像  $\phi: M' \rightarrow M'$  を次のように定める。

$$\phi|_{\text{cl}(M' - N(A_i))} = \text{id} \quad (\text{恒等写像}), \quad \phi|_{N(A_i)}(s, t, e^{i\theta}) = (s, t, e^{i(\theta + 2\pi t)})$$

ただし、 $(s, t, e^{i\theta}) \in N(A_i) = a_i \times [0, 1] \times S^1$  (図 17.3)

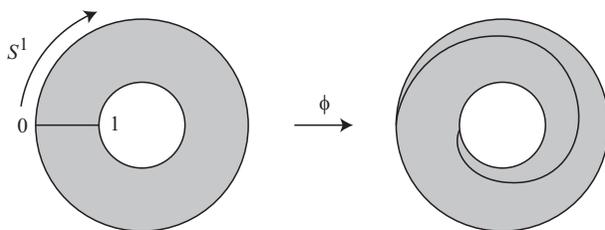


図 17.3

図 17.3 は、 $\phi$  を  $[0, 1] \times S^1$  に制限したときの動きを現しており、それは  $[0, 1]$  を  $S^1$  方向に 1 回巻き付ける写像である。このとき、断面  $c(B')$  の  $\phi$  による像  $\phi(c(B'))$  は、やはり  $S^1$  束  $p': M' \rightarrow B'$  の断面になる。よって  $\phi(c(B')) \cap T_i = c'_i$  とおくと、 $\pi_1(T_i) \cong \langle h'_i | - \rangle \oplus \langle c_i | - \rangle$  であり、 $c'_i = c_i + h_i$  である。よって  $c_i = c'_i - h_i$  より、

$$f(m_i) = \alpha_i c_i + \beta_i h_i = \alpha_i c'_i + (\beta_i - \alpha_i) h_i$$

となり、 $(\alpha_i, \beta_i)$  のかわりに  $(\alpha_i, \beta_i - \alpha_i)$  を採用しても、できあがる 3 次元多様体の位相形は変わらないことがわかる。このような操作を断面の取りかえとよぶ。また断面の取りかえにおいて、 $S^1$  方向を逆にすると、 $(\alpha_i, \beta_i)$  のかわりに  $(\alpha_i, \beta_i + \alpha_i)$  を採用することもできる。以上により、 $(\alpha_i, \beta_i)$  は  $0 < \beta_i < \alpha_i$  とできることが示された。

これらの整数の組  $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)$  をザイフェルト不変量とよぶ。したがってザイ

フェルト多様体の位相形は、 $\partial B \neq \emptyset$  の場合、底空間  $B$  とザイフェルト不変量  $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)$  で決まることがわかった。このようなザイフェルト多様体を、

$$S(B; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

と書く。

次に  $\partial B = \emptyset$  とする。 $p: M \rightarrow B$  を射影とし、特異ファイバーを  $s_1, \dots, s_r$  とする。また、それらの（ファイバーの和であるような）正則近傍を  $V_1, \dots, V_r$  とし、

$$M' = \text{cl}(M - (V_1 \cup \dots \cup V_r)), \quad p(M') = B', \quad p(V_i) = D_i \quad (i = 1, \dots, r)$$

とおく。 $\partial B = \emptyset$  なので、 $\partial B'$  の連結成分の数はちょうど  $r$  である。 $B'$  内に 2 次元円板を一つ指定し  $D_0$  とおき、 $p^{-1}(D_0) = V_0$  とし、 $M'' = \text{cl}(M' - V_0)$ ,  $B'' = \text{cl}(B' - D_0)$  とおく。また、 $M^* = \text{cl}(M - V_0)$ ,  $B^* = \text{cl}(B - D_0)$  とおく。

$M^*$  は底空間を  $B^*$  とし、 $r$  本の特異ファイバーをもつザイフェルト多様体であり、 $\partial B^* \neq \emptyset$  なので、 $\partial B \neq \emptyset$  のときの議論により、その位相形は、 $B^*$  とザイフェルト不変量  $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)$  で決まる。したがって  $M$  の位相形は、これらの不変量と、 $\partial V_0$  を  $\partial M^*$  に貼り合わせる写像によって決まる。 $V_0$  のメリディアンとロンジチュードを  $m, \ell$  とし、 $\partial M^*$  における正則ファイバーを一つ指定し  $h$  とおく。また  $M''$  は断面をもつ  $S^1$  束なので、その断面の境界の連結成分の中で、 $\partial M^*$  に現れるものを  $c_0$  とし、 $f: \partial V_0 \rightarrow \partial M^*$  を貼り合わせの写像とする。 $V_0$  は正則ファイバーの正則近傍なので、 $(1, q)$  型のファイバートーラス体である。よって  $f^{-1}(h) = \ell + qm$  となり、ある整数  $b$  によって  $f(m) = c_0 + bh$  となる。ここで断面の取りかえを行うと、 $\partial B \neq \emptyset$  のときと同様の議論により、 $b$  が  $\pm 1$  だけ変わることがわかる。ゆえにどのような断面を取っても、 $f(m) = c_0 + bh$  と表すことができる。この整数  $b$  を曲面上の  $S^1$  束のときと同じように、ザイフェルト多様体の障害類とよぶ。またこのようなザイフェルト多様体を、 $S(B, b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$  と書く。ザイフェルト多様体は、特異ファイバーをもつ場合ファイバー束ではないので、断面は定義できないが、便宜上、 $\partial B \neq \emptyset$  のときは常に断面をもつとし、 $\partial B = \emptyset$  のときは、 $b = 0$  のとき断面をもつと考える。以上で次が得られた。

**定理 17.1**  $M$  を、底空間を  $B$  とし、 $r$  本の特異ファイバーをもつザイフェルト多様体とする。このとき次が成り立つ。

(1)  $\partial B \neq \emptyset$  のとき、 $M \cong S(B; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ 。

(2)  $\partial B = \emptyset$  のとき、 $M \cong S(B, b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ 。

ただし (1), (2) において、 $(\alpha_i, \beta_i)$  は互いに素な整数の組であり、 $1 < \alpha_i$  とする。また必要ならば、 $0 < \beta_i < \alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) とできる。

上記の定理により、ザイフェルト多様体を記述する方法が得られた。しかし、断面の取りかたによって、 $b$  および  $(\alpha_i, \beta_i)$  は変化するので、表現は 1 通りではない。またその変化の仕方は、既に述べたとおりである。たとえば、底空間  $B$  が  $\partial B = \emptyset$  であるとき、 $S(B, 0; (3, 2)) \cong S(B, -1; (3, 5)) \cong S(B, 1; (3, -1))$  等が成り立つ。

**問題 17.1** 定理 17.1(2) において, 障害類  $b$  と, ザイフェルト不変量を分数で表したものの和  $b + \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{\beta_r}{\alpha_r}$  は, 断面のとりかたによらずに一定であることを示せ。

**問題 17.2** 定理 17.1(2) において,  $M$  の向きを逆にしたものを  $-M$  と書く。このとき,  $-M \cong S(B, -b - r; (\alpha_1, \alpha_1 - \beta_1), \dots, (\alpha_r, \alpha_r - \beta_r))$  を示せ。

ザイフェルト多様体  $M$  は, 互いに交わらない単純閉曲線  $C_\alpha$  の和集合として,  $M = \bigcup C_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) と表されるので, この  $\{C_\alpha\}$  と  $M$  の組  $(M, \{C_\alpha\})$  を  $M$  のファイバー構造とよぶ。二つの同相なザイフェルト多様体  $M = \bigcup C_\alpha$ ,  $N = \bigcup C_\beta$  に対して, 同相写像  $f: M \rightarrow N$  で, 任意の  $C_\alpha$  に対して  $f(C_\alpha) = C_\beta$  をみたすものを, ファイバー構造を保存する同相写像という。またこのとき, 二つのファイバー構造は同相であるという。さらに  $M = N$  であり, 上記の  $f$  が  $M$  上の恒等写像にイソトピックのとき, 二つのファイバー構造はイソトピックであるという。上記の問題 17.1, 17.2 は, ザイフェルト多様体のファイバー構造を固定して考えているが, 同相でないファイバー構造をもつザイフェルト多様体も存在する。

**問題 17.3**  $M\ddot{o}$  をメービウスの帯とする。  $S(D^2; (2, 1), (2, 1)) \cong M\ddot{o} \tilde{\times} S^1$  を示せ。これはまた, 問題 16.6 より, クラインの壺上のひねり  $I$  束でもある。また,  $S(D^2; (2, 1), (2, 1))$  を  $S(D^2; (2, 1), (2, -1))$  とみたときの断面の境界が,  $M\ddot{o} \tilde{\times} S^1$  の境界上の正則ファイバーとなることを示せ。

**問題 17.4**  $S(S^2, b; (2, 1), (2, 1), (\alpha, \beta)) \cong S(P^2, 0; (\beta + (b+1)\alpha, \alpha))$  を示せ。この多様体をプリズム多様体という。  $\alpha > 1$  なので,  $\beta + (b+1)\alpha = 0$  とはならない。

**問題 17.5**  $K$  をクラインの壺とする。  $S(S^2, -2; (2, 1), (2, 1), (2, 1), (2, 1)) \cong S(K, 0)$  を示せ。

ここで, 以下のようなザイフェルト多様体を考えよう。

- (i)  $S^2 \times S^1, S^3$  および, レンズ空間。
- (ii) プリズム多様体  $\cong S(S^2, b; (2, 1), (2, 1), (\alpha, \beta))$ 。
- (iii) 二つのクラインの壺上のひねり  $I$  束を, その表面の恒等写像で貼り合わせた多様体  $\cong S(S^2, -2; (2, 1), (2, 1), (2, 1), (2, 1))$ 。
- (iv) トーラス体。
- (v) クラインの壺上のひねり  $I$  束  $K \tilde{\times} I \cong S(D^2; (2, 1), (2, 1))$ 。

このとき次が成り立つ。証明は [12] 等を参照されたい。

**定理 17.2**  $M, N$  を同相なザイフェルト多様体とする。  $M$  が上記の (i) ~ (v) に属さないならば, ファイバー構造を保存するような  $M$  から  $N$  への同相写像が存在する。

また境界をもつザイフェルト多様体については, さらに次が成り立つ。

**定理 17.3**  $M, N$  を同相なザイフェルト多様体とし,  $f: M \rightarrow N$  を同相写像とする。  $\partial M \neq \emptyset$  であり,  $M$  が  $S^1 \times S^1 \times I, S^1 \times D^2, K \tilde{\times} I$  に同相でないならば,  $f$  はファイバー

構造を保存する同相写像にイソトピックである。ここで  $K$  はクラインの壺である。

最後にザイフェルト多様体の中の両側圧縮不可能曲面の状況を明らかにした結果を紹介する。証明はやはり [12] 等を参照されたい。

**定理 17.4**  $M$  をザイフェルト多様体とし、 $F$  を  $M$  に適切に埋め込まれた両側圧縮不可能曲面とする。このとき、次のうちの 하나가成り立つ。

(1)  $F$  はアニュラスであり、 $\partial M$  内のアニュラス  $F'$  で、 $F \cap F' = \partial F = \partial F'$  であり、 $F \cup F'$  が  $M$  内のトーラス体の境界となるものが存在する。

(2)  $M$  は  $S^1$  上の曲面束であり、 $F$  はそのファイバーとなる。

(3)  $F$  は  $M$  を二つの 3 次元多様体  $M_1, M_2$  に分離し、 $M_1, M_2$  はともに向き付け不可能曲面上のひねり  $I$  束である。

(4)  $F$  は  $M$  のファイバーの和となるような、アニュラスかまたはトーラスにアンビエントイソトピックである。

## 17.2 ザイフェルト多様体の基本群の表示

本節において、ザイフェルト多様体の基本群の表示を求める。 $M$  を  $r$  本の特異ファイバーをもつザイフェルト多様体とし、 $B$  を底空間、 $p: M \rightarrow B$  をその射影とする。さらに  $\partial M = \emptyset$  とする。このとき  $\partial B = \emptyset$  である。

はじめに  $B$  が向き付け可能な場合を考える。このとき  $B$  は種数  $g$  の向き付け可能閉曲面  $F_g$  なので、 $M \cong S(F_g, b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$  である。 $F_g$  上の特異点を  $x_1, \dots, x_r$  とし、また正則点を一つ指定し  $x_0$  とする。 $D_0, D_1, \dots, D_r$  を  $x_0, x_1, \dots, x_r$  の互いに交わらない  $F_g$  上の正則近傍とし、 $V_i = p^{-1}(D_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) とおく。また  $F'_g = \text{cl}(F_g - (D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_r))$  とし、 $M' = p^{-1}(F'_g)$  とおく。

このとき  $M'$  は  $F'_g$  上の  $S^1$  束であり、 $F'_g$  が向き付け可能であることから、 $\partial F'_g \neq \emptyset$  から、命題 16.2 より  $M' \cong F'_g \times S^1$  である。 $F'_g$  の向きと  $S^1$  の向きを、この順で定める  $M'$  の向きが、 $M$  の向きと一致するように指定する。 $\partial D_i = c_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) とおく。 $\partial F'_g = c_0 \cup c_1 \cup \dots \cup c_r$  なので、 $c_i$  には  $F'_g$  の向きから決まる向きを指定する。そしてこれらを  $\pi_1(F'_g)$  の元とみなす。また、 $F_g$  は種数  $g$  の向き付け可能閉曲面なので、 $F_g$  を一つの 2 次元円板に切り開く  $2g$  本の単純閉曲線  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  がある。これらを  $F'_g$  上の単純閉曲線とみなし、 $\pi_1(F'_g)$  の元とみなす。ただし、 $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c_1 \dots c_r c_0 = 1$  となるように向きを指定する。また、 $S^1$  が表す  $\pi_1(M')$  の元を  $h$  とする。このとき、 $\pi_1(M')$  は  $\pi_1(F'_g)$  と  $\pi_1(S^1)$  の直積群なので、7 章の例 1 と命題 9.2 より  $\pi_1(M')$  は次の表示をもつ。

$$\pi_1(M') \cong \left\langle \begin{array}{l} a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \\ c_1, \dots, c_r, c_0 \\ h \end{array} \left| \begin{array}{l} a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c_1 \dots c_r c_0 = 1 \\ a_i h a_i^{-1} = h, \quad b_i h b_i^{-1} = h \quad (i = 1, 2, \dots, g) \\ c_j h c_j^{-1} = h \quad (j = 0, 1, \dots, r) \end{array} \right. \right\rangle$$

ここで  $p^{-1}(c_j) = T_j$  ( $j = 0, 1, \dots, r$ ) とおく。  $\pi_1(T_j) \cong \langle h \mid - \rangle \oplus \langle c_j \mid - \rangle$  であり、  $V_j$  のメリディアンは、  $j = 1, \dots, r$  のときは  $\alpha_j c_j + \beta_j h$  に対応し、  $j = 0$  のときは  $c_0 + bh$  に対応する。したがって  $M = M' \cup (V_1 \cup \dots \cup V_r \cup V_0)$  であることと、 ザイフェルト・ファンカンペンの定理より、  $\pi_1(M)$  は  $\pi_1(M')$  の表示に  $c_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1$  ( $j = 1, \dots, r$ ) と、  $c_0 h^b = 1$  という関係式をつけ加えた表示をもつ。

次に  $B$  が向き付け不可能な場合を考える。このとき  $B$  は種数  $g$  の向き付け不可能閉曲面  $N_g$  なので、  $M \cong S(N_g, b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$  である。  $N_g$  上の  $r$  個の特異点を  $x_1, \dots, x_r$  とし、 また正則点の一つを指定し  $x_0$  とする。そして、  $D_0, D_1, \dots, D_r$  をそれらの正則近傍とし、  $V_i = p^{-1}(D_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ )、  $N'_g = \text{cl}(N_g - (D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_r))$ 、  $M' = p^{-1}(N'_g)$  とおく。このとき命題 16.3 より、  $M' \cong N'_g \tilde{\times} S^1$  となる。したがって、 向き付け不可能曲面上のひねり  $S^1$  束のつくり方に注意すると、 命題 9.2 より、  $\pi_1(M')$  は次の表示をもつ。

$$\pi_1(M') \cong \left\langle \begin{array}{l|l} a_1, a_2, \dots, a_g & a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2 c_1 \cdots c_r c_0 = 1 \\ c_1, \dots, c_r, c_0 & a_i h a_i^{-1} = h^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, g) \\ h & c_j h c_j^{-1} = h \quad (j = 0, 1, \dots, r) \end{array} \right\rangle$$

よって  $M = M' \cup (V_1 \cup \dots \cup V_r \cup V_0)$  より、  $\pi_1(M)$  は、  $\pi_1(M')$  の表示に、  $c_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1$  ( $j = 1, \dots, r$ ) と、  $c_0 h^b = 1$  という関係式をつけ加えた表示をもつ。以上により次が得られた。

**定理 17.5**  $F_g$  を種数  $g$  の向き付け可能閉曲面とし、  $N_g$  を種数  $g$  の向き付け不可能閉曲面とする。このとき次が成り立つ。

$$(1) \pi_1(S(F_g, b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))) \cong$$

$$\left\langle \begin{array}{l|l} a_1, b_1, \dots, a_g, b_g & a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c_1 \cdots c_r = h^b \\ c_1, c_2, \dots, c_r & a_i h a_i^{-1} = h, \quad b_i h b_i^{-1} = h \quad (i = 1, 2, \dots, g) \\ h & c_j h c_j^{-1} = h, \quad c_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, r) \end{array} \right\rangle$$

$$(2) \pi_1(S(N_g, b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))) \cong$$

$$\left\langle \begin{array}{l|l} a_1, a_2, \dots, a_g & a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2 c_1 \cdots c_r = h^b \\ c_1, c_2, \dots, c_r & a_i h a_i^{-1} = h^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, g) \\ h & c_j h c_j^{-1} = h, \quad c_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, r) \end{array} \right\rangle$$

**問題 17.6**  $F_g, N_g$  を、 定理 17.5 における閉曲面とし、 これらから  $s$  個の 2 次元円板の内部を取り除いて得られる曲面をそれぞれ  $F_g^s, N_g^s$  とする。このとき、  $\pi_1(S(F_g^s; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)))$  および、  $\pi_1(S(N_g^s; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)))$  の表示を求めよ。

さて、  $M$  をザイフェルト多様体とし、  $h$  を正則ファイバーが表す  $\pi_1(M)$  の元とする。また、  $h$  によって生成される  $\pi_1(M)$  の部分群を  $N$  とする。このとき  $N$  は巡回群であるが、 定理 17.5 と問題 17.6 から、  $N$  は  $\pi_1(M)$  の正規部分群であることがわかる。そして実は、

基本群が無限群であるようなザイフェルト多様体は、この事実によって特徴付けられる。それが次の定理である。証明は [Ga2] を参照されたい。

**定理 17.6 ([Ga2])**  $M$  をコンパクトな向き付け可能既約 3 次元多様体とする。さらに  $\pi_1(M)$  は無限群であるとする。このとき、 $M$  がザイフェルト多様体であるための必要十分条件は、 $\pi_1(M)$  が無限巡回群を正規部分群として含むことである。

定理 17.6 はザイフェルト多様体予想とよばれたものであり、 $M$  がハーケン多様体であるという仮定を付けた場合は、[12] にその証明が書かれている。

### 17.3 ザイフェルト多様体のヒーガード分解

ザイフェルト多様体のヒーガード種数は、[B-Z] において、底空間が向き付け不可能な閉曲面の場合は完全に決定されており、また向き付け可能な閉曲面の場合は、いくつかの例外を除いて決定されている。本節では、底空間が向き付け可能な閉曲面であるようなザイフェルト多様体をもつ、基本的なヒーガード分解を紹介し、そのような多様体についての、[B-Z] における結果を紹介する。そして最後に、ポアロとチーシャンクによって発見された、ヒーガード種数と基本群の生成元の最小数が一致しない例を紹介する。

**命題 17.7 ([B-Z])**  $F_g$  を種数  $g$  の向き付け可能閉曲面とし、 $M \cong S(F_g, b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$  とする。このとき次が成り立つ。

- (1)  $r \geq 3$  のとき、 $M$  は種数  $2g + r - 1$  のヒーガード分解をもつ。
- (2)  $r \leq 2$  のとき、 $M$  は種数  $2g + 1$  のヒーガード分解をもつ。
- (3)  $r = 1$  のとき、 $b = 0$ 、 $\beta_1 = \pm 1$  ならば、 $M$  は種数  $2g$  のヒーガード分解をもつ。
- (4)  $r = 0$  のとき、 $b = \pm 1$  ならば、 $M$  は種数  $2g$  のヒーガード分解をもつ。

**証明**  $p: M \rightarrow F_g$  を射影とする。

(1)  $r \geq 3$  とする。 $F_g$  上の特異点を  $x_1, \dots, x_r$  とする。 $D_i$  を  $x_i$  の  $F_g$  における正則近傍とし ( $i = 1, \dots, r$ )、 $F'_g = \text{cl}(F_g - (D_1 \cup \dots \cup D_r))$ 、 $F_g^* = \text{cl}(F_g - D_1)$  とおく。 $\partial D_i = c_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) とおくと、 $\partial F'_g = c_1 \cup \dots \cup c_r$ 、 $\partial F_g^* = c_1$  である。このとき、 $F_g^*$  に適切に埋め込まれた  $2g$  本の弧で、 $F'_g$  を一つの 2 次元円板に切り開くものが存在するので、それらを  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  とおく。ただし  $(a_1 \cup b_1 \cup \dots \cup a_g \cup b_g) \cap (D_2 \cup D_3 \cup \dots \cup D_r) = \emptyset$  とできるので、これらを、 $F'_g$  に適切に埋め込まれた弧とみなす。また  $F'_g$  に適切に埋め込まれた弧で、 $c_1$  と  $c_2, \dots, c_{r-1}$  を結ぶものを  $e_2, \dots, e_{r-1}$  とする (図 17.4)。

さて、 $M' = p^{-1}(F'_g)$ 、 $V_i = p^{-1}(D_i)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) とおく。このとき、 $M'$  は  $F'_g$  上の  $S^1$  束なので、命題 16.2 より  $M' \cong F'_g \times S^1$  である。よって、 $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, e_2, \dots, e_{r-1}$  は、 $M' \cong F'_g \times S^1$  に適切に埋め込まれた弧とみなせるので、 $M'$  におけるこれらの弧の正則近傍を、 $N(a_1), N(b_1), \dots, N(a_g), N(b_g), N(e_2), \dots, N(e_{r-1})$  とする。このとき、 $N(a_i) \cap V_1$ 、 $N(b_i) \cap V_1$  はそれぞれ  $\partial V_1$  上の二つの 2 次元円板であり、 $N(e_j) \cap V_1$ 、 $N(e_j) \cap V_j$  は、それぞれ  $\partial V_1$ 、 $\partial V_j$  上の一つの 2 次元円板である。よって  $W_1 = V_1 \cup \dots \cup V_{r-1} \cup N(a_1) \cup N(b_1) \cup$

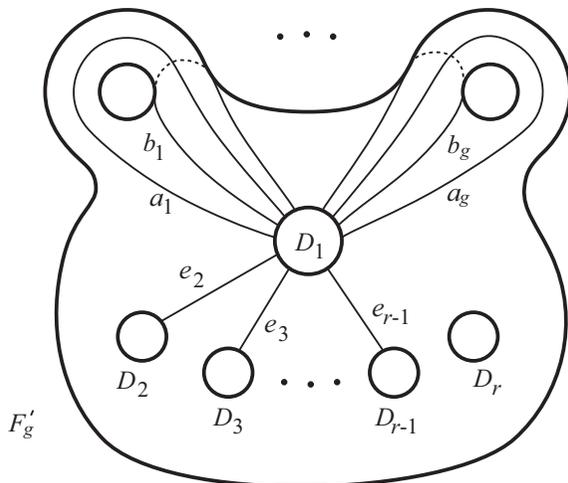


図 17.4

$\cdots \cup N(a_g) \cup N(b_g) \cup N(e_2) \cup \cdots \cup N(e_{r-1})$  とおくと、 $W_1$  は  $M$  内の種数  $2g+r-1$  のハンドル体である。

次に  $W_2 = \text{cl}(M - W_1)$  とおく。

$$\begin{aligned} p^{-1}(a_i) \cap W_2 &= \text{cl}(p^{-1}(a_i) - N(a_i)), & p^{-1}(b_i) \cap W_2 &= \text{cl}(p^{-1}(b_i) - N(b_i)), \\ p^{-1}(e_j) \cap W_2 &= \text{cl}(p^{-1}(e_j) - N(e_j)) \end{aligned}$$

より、

$$p^{-1}(a_i) \cap W_2, \quad p^{-1}(b_i) \cap W_2, \quad p^{-1}(e_j) \cap W_2$$

は、すべて  $W_2$  に適切に埋め込まれた非分離的 2次元円板である。よって、これら  $2g+r-2$  個の 2次元円板で  $W_2$  を切り開いたものを  $U$  とすると、 $U$  は  $V_r$  の正則近傍であり、トーラス体である。ゆえに、 $U$  のメリディアン円板と先ほどの  $2g+r-2$  個の 2次元円板を合わせるにより、 $2g+r-1$  個の 2次元円板からなる  $W_2$  の完備メリディアン円板系が得られる。したがって、 $W_2$  は種数  $2g+r-1$  のハンドル体である。すなわち、 $M$  は種数  $2g+r-1$  のヒーガード分解  $(W_1, W_2)$  をもつ。

(2) は読者に委ねる (問題 17.7)。

(3)  $r=1, b=0, \beta_1 = \pm 1$  とし、 $F_g$  上の特異点を  $x_1$  とする。 $D_1$  を  $x_1$  の  $F_g$  における正則近傍とし、 $F'_g = \text{cl}(F_g - D_1)$ ,  $V_1 = p^{-1}(D_1)$ ,  $M' = p^{-1}(F'_g)$  とおく。 $M' \cong F'_g \times S^1$  であり、 $\partial F'_g = \partial D_1 = c_1$  とおくと、 $\partial M' = c_1 \times S^1$  である。 $\partial M'$  上の正則ファイバー  $S^1$  が表す  $\pi_1(\partial M')$  の元を  $h$  とし、 $V_1$  のメリディアンが表す  $\pi_1(\partial V_1)$  の元を  $m_1$  とする。 $f_1: \partial V_1 \rightarrow \partial M_1$  を貼り合わせの写像とすると、 $b=0, \beta_1 = \pm 1$  より、 $f_1(m_1) = \alpha_1 c_1 \pm h$  である。

$S^1 = [0, 1]/\{0\} \sim \{1\}$  なので、 $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$ ,  $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$  とおき、 $W_1 = F'_g \times I_1$ ,  $W_2 = F'_g \times I_2$  とおくと、 $W_1, W_2$  はともに種数  $2g$  のハンドル体であり (問題 17.8),

$$M' = W_1 \cup W_2, \quad W_1 \cap W_2 = F'_g \times \{0\} \cup F'_g \times \{\frac{1}{2}\}$$

である。ここでアニュラス  $\partial F'_g \times I_1$  に注目すると、 $f_1(m_1) = \alpha_1 c_1 \pm h$  であることより、 $f_1^{-1}(\partial F'_g \times I_1)$  は  $\partial V_1$  において、 $V_1$  のロンジチュード方向に 1 回巻き付くアニュラスである。よって  $\tilde{W}_1 = W_1 \cup V_1$  とおくと、 $\tilde{W}_1$  はやはり種数  $2g$  のハンドル体であり (問題 17.8),  $M = \tilde{W}_1 \cup W_2$ ,  $\tilde{W}_1 \cap W_2 = \partial \tilde{W}_2 = \partial W_2$  である。すなわち、 $M$  は種数  $2g$  のヒーガード分解  $(\tilde{W}_1, W_2)$  をもつ。

(4) は読者に委ねる (問題 17.9)。以上で命題の証明が終わる。 □

**問題 17.7** 命題 17.7(2) を示せ。

**問題 17.8** 命題 17.7(3) の証明において、 $W_1, W_2$  がともに種数  $2g$  のハンドル体であることを示せ。また、 $\tilde{W}_1$  がやはり種数  $2g$  のハンドル体であることを示せ。

**問題 17.9** 命題 17.7(4) を示せ。

$M$  を閉 3 次元多様体とし、 $r(M)$  を  $\pi_1(M)$  の生成元の最小数、 $g(M)$  を  $M$  のヒーガード種数とする。系 7.6 より  $r(M) \leq g(M)$  が成り立つ。この不等式を用いて、命題 17.7 におけるザイフェルト多様体のヒーガード種数は、次のように評価される。証明は [B-Z] を参照されたい。

**定理 17.8 ([B-Z])**  $M \cong S(F_g, b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$  とする。このとき、以下が成り立つ。

I.  $g > 0$  の場合。

(i)  $r \geq 2$  ならば、 $r(M) = g(M) = 2g + r - 1$ 。

(ii)  $r = 1$  のとき。  $b = 0$ ,  $\beta_1 = \pm 1$  ならば、 $r(M) = g(M) = 2g$ 。それ以外するとき、 $r(M) = g(M) = 2g + 1$ 。

(iii)  $r = 0$  のとき。  $b = \pm 1$  ならば、 $r(M) = g(M) = 2g$ 。それ以外するとき、 $r(M) = g(M) = 2g + 1$ 。

II.  $g = 0$  の場合。

(i)  $r \geq 4$ ,  $r$  が偶数であり、 $M \cong S(F_0, b; (2, 1), (2, 1), \dots, (2, 1), (\alpha_r, \beta_r))$  (ただし  $\alpha_r$  は奇数) ならば、 $r - 2 = r(M) \leq g(M) \leq r - 1$ 。特に  $b = -\frac{r}{2}$ ,  $\alpha_r = 2n + 1$  であり、 $\beta_r = n$  または  $n + 1$  ならば、 $r(M) = g(M) = r - 2$ 。

(ii)  $r \geq 3$  であり、 $M$  が (i) に属さないとき。  $r(M) = g(M) = r - 1$ 。

(iii)  $r = 1$  のとき。  $b = 0$ ,  $\beta_1 = \pm 1$  ならば、 $r(M) = g(M) = 0$ 。それ以外するとき、 $r(M) = g(M) = 1$ 。

(iv)  $r = 0$  のとき。  $b = \pm 1$  ならば、 $r(M) = g(M) = 0$ 。それ以外するとき、 $r(M) = g(M) = 1$ 。

**【注意】** 定理 17.8 の  $g = 0$  の場合において、 $r = 2$  のときがないが、そのような多様体は、 $r \leq 1$  のときに含まれる。

定理 17.8 の II-(i) において、 $g(M)$  が決定されていない場合がある。しかし  $r = 4$  の場合、このような多様体の  $g(M)$  は、以下のように決定されている。証明は、[B-Z] かまたは

[Mo3] を参照されたい。[B-Z] における証明は、結び目理論を用いており、また [Mo3] における証明は、ヒーガード分解と  $M$  内の本質的トラスとの交わりに注目して、A型イソトピーを用いて示している。

**命題 17.9 ([B-Z], [Mo3])**  $M \cong S(S^2, b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3), (\alpha_4, \beta_4))$  とする。 $M$  が種数 2 のヒーガード分解をもつための必要十分条件は、ある正の整数  $n$  に対して、次が成り立つことである。

$$M \cong S(S^2, -2; (2, 1), (2, 1), (2, 1), (2n + 1, n + 1))$$

さて、ワルトハンゼンは、向き付け可能閉 3 次元多様体  $M$  に対して、 $r(M) = g(M)$  が常に成り立つであろうかと問いかけた ([Wa2])。  $r(M) = 0$  のときはポアンカレ予想なので、これはポアンカレ予想の一般化といえる。しかし、定理 17.8 と命題 17.9 は、この問いに対する否定的な解答を与えている。たとえば、ある正の整数  $n$  に対して

$$M \cong S(S^2, -1; (2, 1), (2, 1), (2, 1), (2n + 1, n + 1))$$

とする。このとき定理 17.8 の II-(i) より、 $r(M) = 2$  であり、 $g(M) \leq 3$  である。一方、命題 17.9 と定理 17.2 より  $g(M) = 3$  となる。したがってこれは、 $r(M) = 2 < 3 = g(M)$  という例である。

またこの  $M$  を  $m$  個用意し、それらを連結和した多様体を  $M_m$  とする。このとき、「有限生成群の生成元の最小数は、自由積に関して加法性をもつ」というグルーシュコの定理より、 $r(M)$  は連結和に関して加法性をもつので、 $r(M_m) = 2m$  となる。また  $g(M)$  の加法性 (定理 11.15) から、 $g(M_m) = 3m$  である。したがって、 $g(M_m) - r(M_m) = m$  より、 $g(M)$  と  $r(M)$  との差はいくらでも大きくなりうる事がわかる。

最後に  $M \cong S(S^2, -1; (2, 1), (2, 1), (2, 1), (3, 2))$  とし、 $M$  のヒーガード図式 (図 17.5) と、 $M$  の基本群の二つの元を生成元とする表示を紹介して、本章を終わる。基本群の表示は、[B-Z] の証明における表示を具体的に書き下したものである。

$$\begin{aligned} \pi_1(M) &\cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^2 x_3^3 = 1, x_2^2 x_3^3 = 1, (x_2 x_3 x_1)^2 x_3^{-3} = 1 \rangle \\ &\cong \langle y_1, y_2 \mid r_1 = 1, r_2 = 1 \rangle \end{aligned}$$

ここで、 $r_1, r_2$  は以下のような文字列である。

$$\begin{aligned} r_1 &= (y_2(y_1^{-1}y_2(y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^{-1}(y_2y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^2)^{-4}y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^2 \\ &\quad (y_1^{-1}y_2(y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^{-1}(y_2y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^2)^2 \\ r_2 &= ((y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^{-1}(y_1^{-1}y_2(y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^{-1}(y_2y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^2)^4)^2 \\ &\quad (y_1^{-1}y_2(y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^{-1}(y_2y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^2)^2 \end{aligned}$$

また、二つの表示の生成元の対応は以下となる。

$$\begin{aligned} x_1 &= y_2(y_1^{-1}y_2y_1^{-1}y_2^{-1}y_1y_2y_1^{-1}(y_2y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^2)^{-2}y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1 \\ x_2 &= y_1^{-1}y_2^{-1}y_1y_2y_1^{-1}(y_1^{-1}y_2y_1^{-1}y_2^{-1}y_1y_2y_1^{-1}(y_2y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^2)^2 \\ x_3 &= (y_1^{-1}y_2y_1^{-1}y_2^{-1}y_1y_2y_1^{-1}(y_2y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2y_1)^2)^{-2}y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2 \\ y_1 &= x_3^{-1}x_2^{-1}, \quad y_2 = x_1x_2 \end{aligned}$$

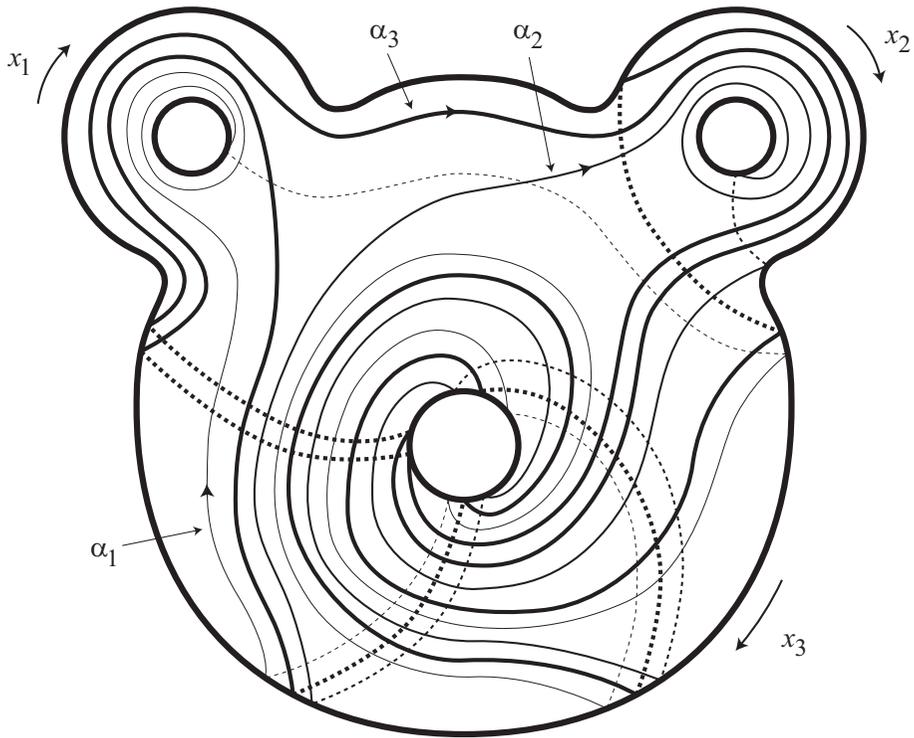


図 17.5

# 第18章

## トーラス分解

3次元多様体の連結和分解は、本質的2次元球面で切り開くことによって、3次元多様体をより簡単なものに分解しようというものであった。そしてこれ以上切り開くことができなくなった3次元多様体を、既約多様体とよんだ。本章では、この既約多様体をさらに本質的トーラスで切り開き、より簡単なものにしようというトーラス分解について学ぶ。トーラス分解の存在と一意性、そしてより一般的に、特性ザイフェルト対の存在と一意性は、ジェイコ・シャーレン ([J-S]) とヨハンソン ([Jo]) によって独立に証明された。本章では [12] にしたがってそれらを紹介し、トーラス分解の存在と一意性の証明は、ハッチャー ([Ht]) によって簡略化されたものを紹介する。また小林による、トーラス分解とヒーガード分解との関係についての結果を紹介する ([Ko2])。

### 18.1 特殊ザイフェルト多様体

$M$  を3次元多様体とし、 $F$  を  $M$  に適切に埋め込まれた曲面とする。埋め込み  $h: F \times [0, 1] \rightarrow M$  で、

$$h(F \times \{0\}) = F, \quad h(F \times [0, 1]) \cap \partial M = h(\partial F \times [0, 1] \cup F \times \{1\})$$

をみたすものがあるとき、 $F$  は境界平行という。さらに  $\partial F \neq \emptyset$  のとき、 $F' = h(\partial F \times [0, 1] \cup F \times \{1\})$  は、 $\partial M$  内の  $F$  に同相な曲面であり、 $F' \cap F = \partial F' = \partial F$  なので、 $F$  は  $F'$  に境界を止めて平行という。 $F$  が2次元球面または2次元円板以外の曲面のときは、 $F$  が  $M$  内の圧縮不可能曲面であり境界平行でないとき、 $F$  は本質的といい、そうでないとき  $F$  は非本質的という。 $F$  が2次元球面か2次元円板のときは、 $F$  の本質性と非本質性は、10章および11章で定めたとおりでである。また曲面  $F$  上の二つの単純閉曲線  $C_1, C_2$  に対して、 $F$  内のアニュラス  $A$  で、 $\partial A = C_1 \cup C_2$  となるものがあるとき、 $C_1$  と  $C_2$  は  $F$  において互いに平行という。

本節において、本質的トーラスを含まないようなザイフェルト多様体の特徴付けを行う。そのためにもまず、ザイフェルト多様体の既約性について考えよう。 $S^2 \times S^1$  は  $S^2$  上の  $S^1$  束であり、 $P^3 \# P^3$  は問題 16.7 より、 $P^2$  上のひねり  $S^1$  束である。よって、これらはともにザイフェルト多様体である。しかも、ともに本質的2次元球面を含むので既約ではない。そしてさらに次が成り立つ（証明は [12] 等を参照されたい）。

**補題 18.1**  $M$  をザイフェルト多様体とする。 $M$  が既約でないならば、 $M$  は  $S^2 \times S^1$

かまたは  $P^3 \# P^3$  である。

底空間が、以下のものの一つであるようなザイフェルト多様体を考える。

- (i) 特異点が 0, 1, または 2 個の 2 次元円板。
- (ii) 特異点が 0 または 1 個のアニュラス。
- (iii) 特異点のない 2 次元円板から、二つの 2 次元円板の内部を取り除いた曲面。
- (iv) 特異点のないメービウスの帯。
- (v) 特異点が 0, 1, 2, または 3 個の 2 次元球面。
- (vi) 特異点が 0 または 1 個の射影平面。

上記の (i) ~ (vi) に属する多様体を特殊ザイフェルト多様体という。

ここでトーラス上の自己同相写像は、整数上の 2 次正則行列を用いて表されることを思い出そう (付録参照)。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で表されるトーラス上の自己同相写像を  $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$  とし、これらを貼り合わせの写像とする  $S^1$  上のトーラス束を  $M_A, M_B, M_C$  と書く。このときこれらは、次のようなザイフェルト多様体となり、上記の (v) に属する。またこれらは、本質的トーラス (ファイバー) を含む。

$$\begin{aligned} M_A &\cong S(S^2, -1; (3, 1), (3, 1), (3, 1)), \\ M_B &\cong S(S^2, -1; (2, 1), (4, 1), (4, 1)), \\ M_C &\cong S(S^2, -1; (2, 1), (3, 1), (6, 1)). \end{aligned}$$

このとき次が成り立つ。

**補題 18.2**  $M$  を特殊ザイフェルト多様体とする。 $M$  が本質的トーラスを含むならば、 $M$  は上記の  $M_A, M_B, M_C$  のうちのいずれかに同相である。

**証明**  $M$  を (i) に属する特殊ザイフェルト多様体とする。定理 17.4 を用いると、 $M$  が本質的トーラスを含まないことは容易に示されるが、ここでは定理 17.4 を用いない証明を行う。

$B$  を  $M$  の底空間、 $p: M \rightarrow B$  を射影とする。 $B$  は特異点が 0, 1, または 2 個の 2 次元円板である。

特異点が 0 または 1 個のとき。 $M$  はトーラス体なので、 $\pi_1(M)$  は  $\mathbf{Z}$  に同形である。一方、 $M$  が本質的トーラスを含むならば、命題 5.3(1) と補題 13.1 より、 $\pi_1(M)$  は  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  を部分群として含む。これは矛盾であり、 $M$  は本質的トーラスを含まない。

特異点が 2 個のとき。 $T$  を  $M$  内の圧縮不可能トーラスとする。 $B$  に適切に埋め込まれた弧で、二つの特異点を分離するものを  $\alpha$  とし、 $B$  を  $\alpha$  で切り開いて得られる 2 次元円板を  $B_1, B_2$  とする。 $B_1, B_2$  はそれぞれ 1 個の特異点を含む 2 次元円板である。 $A = p^{-1}(\alpha)$ ,  $V_1 = p^{-1}(B_1)$ ,  $V_2 = p^{-1}(B_2)$  とおく。 $A$  はアニュラスであり、 $V_1, V_2$  はトーラス体である。

しかも  $A \subset \partial V_1$ ,  $A \subset \partial V_2$  であり,  $A$  は  $V_1, V_2$  のロンジチュード方向に, それぞれ 2 回以上巻き付くアニュラスである。したがって,  $A$  は  $V_1, V_2$  における圧縮不可能アニュラスである (図 18.1)。

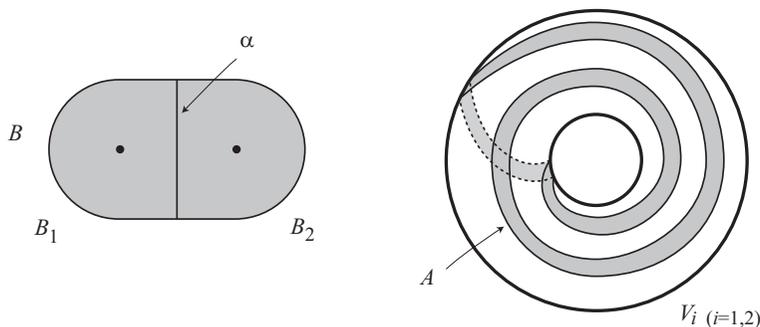


図 18.1

$A$  と  $T$  との交わりに注目する。 $T$  は  $V_1$  または  $V_2$  に含まれることはないので,  $A \cap T \neq \emptyset$  である。一般の位置の議論により,  $A \cap T$  の連結成分はすべて円周としてよい。それらの連結成分のうち,  $A$  上で非本質的なものがあったとする。それらの中で最も内側のものを  $C$  とし,  $C$  を境界とする  $A$  内の 2 次元円板を  $D$  とする。このとき  $T$  の圧縮不可能性から,  $C$  は  $T$  上でも非本質的なので,  $C$  を境界とする  $T$  内の 2 次元円板が存在し, それを  $D'$  とする。このとき  $D \cup D'$  は  $M$  内の 2 次元球面であり, 補題 18.1 から  $M$  は既約なので,  $M$  内の 3 次元球体  $B$  で,  $\partial B = D \cup D'$  となるものがある。よって, この  $B$  に沿ったアンビエントイソトピーによって交わり  $C$  をはずすことができる。

この操作を繰り返すことにより,  $A \cap T$  の連結成分は,  $A$  上ですべて本質的とできる。さらに  $A$  の圧縮不可能性より,  $A \cap T$  の連結成分は,  $T$  上ですべて本質的とできる。また補題 8.1 より,  $T$  上の本質的単純閉曲線は  $T$  を分離しないが,  $A$  は  $M$  を二つの部分に分離することより,  $A \cap T$  は少なくとも二つの連結成分をもつ。

さて, アニュラス内の本質的単純閉曲線はすべて互いに平行であり, トーラス内の本質的単純閉曲線もすべて互いに平行である。したがって  $A \cap T$  の連結成分は,  $A$  上および  $T$  上で, すべて互いに平行である。今,  $A \cap T$  の連結成分のうち,  $T$  上で隣り合うものを  $C_1, C_2$  とする。すなわち,  $T$  内のアニュラス  $A_1$  で,  $\partial A_1 = C_1 \cup C_2$  であり,  $(A \cap T) \cap A_1 = C_1 \cup C_2$  をみたすものがあるとする。このとき  $A_1$  は,  $V_1$  に適切に埋め込まれた圧縮不可能アニュラスとしてよい。また  $\partial A_1 \subset A$  である。さらに問題 18.1 より,  $A_1$  は  $V_1$  において境界平行なので,  $\partial V_1$  内のアニュラス  $A'_1$  に境界を止めて平行である。ここで  $A'_1 \subset A$  ならば,  $A_1$  を  $A'_1$  に重ね合わせ, さらに少しずらすことにより,  $A \cap T$  から交わり  $C_1, C_2$  をはずすことができる。したがって  $A'_1 \not\subset A$  としてよい。

次に,  $A \cap T$  の連結成分で  $T$  上で  $C_2$  に隣りうものを  $C_3$  とする。すなわち,  $T$  上のアニュラス  $B_1$  で,  $\partial B_1 = C_2 \cup C_3$ ,  $(A \cap T) \cap B_1 = C_2 \cup C_3$  をみたすものがあるとする。このとき上記と同様の議論により,  $B_1$  は  $V_2$  に適切に埋め込まれた圧縮不可能アニュラスであ

り、 $\partial V_2$  内のアニュラス  $B'_1$  (ただし  $B'_1 \not\subset A$ ) に境界を止めて平行である。

この議論を繰り返すことにより、 $T \cap V_1 = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ,  $T \cap V_2 = B_1 \cup \cdots \cup B_n$  とおくことができる。ここで、 $A_i, B_i$  はそれぞれ  $V_1, V_2$  内の圧縮不可能アニュラスであり、 $\partial V_1, \partial V_2$  内のアニュラス  $A'_i, B'_i$  (ただし  $A'_i \not\subset A$ ,  $B'_i \not\subset A$ ) に境界を止めて平行である。さらに  $\partial A_1, \partial A_2, \dots, \partial A_n$  は、 $A$  において外側から順番に並んでいるとしてよく、また  $\partial B_1, \partial B_2, \dots, \partial B_n$  も同様である。このとき  $\partial A_1 = \partial B_1$  より、 $T$  の連結性から  $n = 1$  であり、 $T \cap V_1 = A_1$ ,  $T \cap V_2 = B_1$  となる。よって、 $T = A_1 \cup B_1$  は  $\partial M = \text{cl}(\partial V_1 - A) \cup \text{cl}(\partial V_2 - A)$  に平行となる。すなわち、 $M$  内の圧縮不可能トーラスは境界平行であることが示され、 $M$  は本質的トーラスを含まないことが示された。

$M$  が (ii) ~ (vi) に属する場合は読者に委ねる (問題 18.2, 18.3)。 □

**問題 18.1** トーラス体に適切に埋め込まれた圧縮不可能アニュラスは、境界平行であることを示せ。

**問題 18.2** 補題 18.2 の証明において、 $M$  が (ii), (iii), (vi) に属する場合、定理 17.4 を用いずに、 $M$  は本質的トーラスを含まないことを示せ。

**問題 18.3** 補題 18.2 の証明において、 $M$  が (v), (vi) に属する場合、定理 17.4 を用いて、 $M$  は、二つのクラインの壺上のひねり  $I$  束をその表面で貼り合わせたものか、または  $S^1$  上のトーラス束になることを示せ。 $M$  が  $M_A, M_B, M_C$  のいずれかになることを示すには、さらに詳しい議論が必要となる。

ちなみに  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  とおくと、 $M_D$  は問題 17.5 で紹介したザイフェルト多様体  $S(S^2, -2; (2, 1), (2, 1), (2, 1), (2, 1))$  となる。

以上で、特殊ザイフェルト多様体は三つの例外を除いて、本質的トーラスを含まないことがわかったが、実は、本質的トーラスを含まないザイフェルト多様体は、このようなものに限るということが次のとおり示される。

**命題 18.3**  $M$  をザイフェルト多様体とする。このとき、 $M$  が本質的トーラスを含まないための必要十分条件は、 $M$  が  $M_A, M_B, M_C$  以外の特殊ザイフェルト多様体に同相となることである。

**証明**  $M$  をザイフェルト多様体とし、 $B$  を  $M$  の底空間、 $p: M \rightarrow B$  をその射影とする。問題 17.6 における記号を用いて、 $B = F_g^s$  または  $B = N_g^s$  とおく。

$M$  が  $M_A, M_B, M_C$  以外の特殊ザイフェルト多様体に同相ならば、補題 18.2 より  $M$  は本質的トーラスを含まないことがわかる。

逆に  $M$  は本質的トーラスを含まないとする。

$B = F_g^s$  のとき、 $g > 0$  とすると、 $F_g^s$  は非分離的両側単純閉曲線をもつので、それを  $C$  とし  $T = p^{-1}(C)$  とする。このとき、 $T$  は  $M$  内の両側圧縮不可能トーラスである (問題 18.4)。また、 $C$  が非分離的であることより  $T$  も非分離的である。よって境界平行ではないので、本質的である。すなわち、 $g > 0$  ならば  $M$  は本質的トーラスを含むことが示された。

したがって  $g = 0$  である。

$s > 3$  とする。 $F_0^s$  内の本質的単純閉曲線  $C$  で、 $F_0^s$  を二つの部分  $G_1, G_2$  (ただし  $G_1 \cap \partial F_0^s, G_2 \cap \partial F_0^s$  はそれぞれ二つ以上の連結成分をもつ) に分けるものが存在する。 $T = p^{-1}(C)$  とおくと、 $T$  は  $M$  内の両側圧縮不可能トーラスであり (問題 18.4),  $M$  を二つの部分  $M_1, M_2$  に分ける。しかも  $C$  のとり方から、 $M_1 \cap \partial M, M_2 \cap \partial M$  はそれぞれ二つ以上の連結成分をもつ。したがって  $T$  は境界平行ではない。すなわち  $s > 3$  ならば  $M$  は本質的トーラスを含むことが示され、 $s \leq 3$  である。

$s = 0$  のとき。 $F_0^0$  は 2 次元球面である。特異点の数が 4 以上とすると、 $F_0^0$  内の単純閉曲線  $C$  で、 $F_0^0$  を二つの 2 次元円板  $B_1, B_2$  (ただし  $B_1, B_2$  はそれぞれ 2 個以上の特異点をもつ) に分けるものがある。よって  $T = p^{-1}(C)$  は  $M$  内の本質的トーラスとなる (問題 18.4)。したがって特異点の数は 3 以下であり、 $M$  は (v) に属する。

$s = 1$  のとき。 $F_0^1$  は 2 次元円板である。このとき、 $s = 0$  のときと同様の議論により特異点の数は 2 以下となる。よって  $M$  は (i) に属する。

$s = 2$  のとき。 $F_0^2$  はアニュラスであり、特異点の数は 1 以下である。よって  $M$  は (ii) に属する。

$s = 3$  のとき。 $M$  は (iii) に属する。

$B = N_g^s$  のときは読者に委ねる (問題 18.5)。

以上で、 $M$  が本質的トーラスを含まないならば、 $M$  は特殊ザイフェルト多様体であることが示され、命題の証明が終わる。□

**問題 18.4** 命題 18.3 の証明におけるトーラス  $T$  が  $M$  において圧縮不可能であることを示せ。

**問題 18.5** 命題 18.3 の証明において、 $B = N_g^s$  の場合  $M$  は (iv) または (vi) に属することを示せ。

補題 18.2 と命題 18.3 から次が得られる。

**系 18.4** ザイフェルト多様体が、ファイバーの和となるような本質的トーラスを含まないための必要十分条件は、それが特殊ザイフェルト多様体と同相となることである。

**問題 18.6** 境界のあるザイフェルト多様体が、適切に埋め込まれた本質的アニュラスを含まないための必要十分条件を求めよ。

## 18.2 アニュラス定理とトーラス定理

ループ定理と球面定理は、2 次元円板および 2 次元球面からの写像と、それらの埋め込みについて述べたものであった。本節では、アニュラスおよびトーラスからの写像と、それらの埋め込みについて述べた、アニュラス定理とトーラス定理を紹介する。証明は省略するので、[12] 等を参照されたい。

$M$  をコンパクトな 3 次元多様体とし、 $F$  を  $\partial M$  内のコンパクトな曲面とする。コンパクトな曲面  $G$  に対して、写像対  $f : (G, \partial G) \rightarrow (M, F)$  が次の条件 (1), (2) をみたすとき、 $f$  を非退化という。

(1)  $f_* : \pi_1(G) \rightarrow \pi_1(M)$  は単射。

(2) 写像対のホモトピー  $f_t : (G, \partial G) \rightarrow (M, F)$  で、 $f_0 = f, f_1(G) \subset F$  をみたすものはない。

$M$  をハーケン多様体とし、 $F$  を  $\partial M$  内のコンパクトな圧縮不可能曲面とすると、 $(M, F)$  をハーケン多様体対という。

**定理 18.5 (アニュラス定理)**  $(M, F)$  をハーケン多様体対とし、 $f : (S^1 \times I, S^1 \times \partial I) \rightarrow (M, F)$  を非退化な写像対とする。このとき、非退化な埋め込み  $g : (S^1 \times I, S^1 \times \partial I) \rightarrow (M, F)$  が存在する。特に  $f|_{S^1 \times \partial I}$  が埋め込みならば、 $g(S^1 \times \partial I) = f(S^1 \times \partial I)$  とできる。

**定理 18.6 (トーラス定理)**  $(M, F)$  をハーケン多様体対とし、 $f : (S^1 \times S^1, \emptyset) \rightarrow (M, F)$  を非退化な写像対とする。このとき、非退化な埋め込み  $g : (S^1 \times S^1, \emptyset) \rightarrow (M, F)$  が存在するか、または  $F = \partial M$  であり、 $M$  は特殊ザイフェルト多様体である。

**例 1**  $P$  を、2 次元円板から四つの 2 次元円板の内部を取り除いた曲面とし、 $M = P \times I, F = P \times \partial I$  とおく。また、図 18.2(1) に描かれた  $P$  内の 8 の字形の 1 次元複体とする。このとき、 $f : (S^1 \times I, S^1 \times \partial I) \rightarrow (M, F)$  を  $f(S^1 \times I) = C \times I$  となるように定めると、 $(M, F)$  はハーケン多様体対であり、 $f$  は非退化な写像であるが、非退化な埋め込みにはホモトピックではない。これはアニュラス定理において、 $f$  に対して得られた  $g$  が  $f$  にホモトピックとはならない例である。 $M = P \times S^1, F = \partial P \times S^1$  とすれば、トーラス定理についても同様の例がつけられる。

**例 2**  $B$  を二つの特異点をもつ 2 次元円板とし、 $M$  を、 $B$  を底空間とするザイフェルト多様体、 $p : M \rightarrow B$  をその射影とする。また、図 18.2(2) に描かれた 8 の字形の 1 次元複体を  $C$  とする。このとき、 $f : (S^1 \times S^1, \emptyset) \rightarrow (M, \partial M)$  を  $f(S^1 \times S^1) = p^{-1}(C)$  となるように定めると、 $f$  は非退化な写像である。これは、トーラスからの非退化な写像は許容するが、本質的トーラスは含まない特殊ザイフェルト多様体の例である。

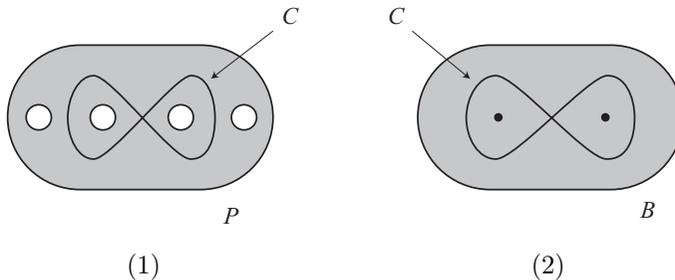


図 18.2

### 18.3 特性ザイフェルト対

コンパクトな向き付け可能 3 次元多様体が本質的トーラスを含まないとき、それを単純多様体という。本節において、「境界が空集合かまたは境界の連結成分がすべて圧縮不可能曲面であるようなハーケン多様体は、特性ザイフェルト対とよばれる部分多様体を一意的にもつ」という、ジェイコ・シャーレン ([J-S]), ヨハンソン ([Jo]) の結果を紹介する。そしてそのことから、そのようなハーケン多様体は、本質的トーラスで切り開くことにより、ザイフェルト多様体の部分と単純多様体の部分に一意的に分けられるということがわかる。この分解をトーラス分解とよぶ。

$\sigma$  をコンパクトな向き付け可能 3 次元多様体とし、 $s$  を  $\partial\sigma$  内のコンパクトな曲面とする。 $\sigma$  が、あるコンパクトな曲面  $B$  上の  $I$  束であり、その射影  $p : \sigma \rightarrow B$  に対して、 $s = \text{cl}(\partial\sigma - p^{-1}(\partial B))$  であるとき、 $(\sigma, s)$  を  $I$ -対とよぶ。このとき  $p|_s : s \rightarrow B$  は  $B$  の 2 重被覆射影である。

$\sigma$  が、あるコンパクトな曲面  $B$  を底空間とするザイフェルト多様体であり、その射影  $p : \sigma \rightarrow B$  と、 $\partial B$  内のいくつかの弧と円周からなる 1 次元多様体  $\alpha$  に対して、 $s = p^{-1}(\alpha)$  であるとき、 $(\sigma, s)$  を  $S^1$ -対とよぶ。 $I$ -対と  $S^1$ -対の有限個の和集合を  $(\Sigma, S)$  と書き、ザイフェルト対とよぶ。すなわち、 $(\Sigma, S) = \bigcup(\sigma, s)$  であり、各  $(\sigma, s)$  は  $I$ -対かまたは  $S^1$ -対である。

$(M, \partial M)$  をハーケン多様体対とし、 $(\Sigma, S)$  を  $(M, \partial M)$  内のザイフェルト対とする。すなわち、 $\Sigma \subset M$ ,  $S \subset \partial M$  であり、 $(\Sigma, S) = \bigcup(\sigma, s)$  である。 $(\Sigma, S)$  が次の条件 (1) ~ (3) をみたしているとき、 $(\Sigma, S)$  は  $(M, \partial M)$  に理想的に埋め込まれているという。

$$(1) \quad \Sigma \cap \partial M = S.$$

(2)  $\text{cl}(\partial\Sigma - \partial M)$  の任意の連結成分は  $M$  で本質的 (本質的アニュラスかまたは本質的トーラス)。

(3)  $(\Sigma, S)$  の各連結成分  $(\sigma, s)$  に対して、ホモトピー  $\{f_t\} : (\sigma, s) \rightarrow (M, \partial M)$  で、 $f_0(\sigma, s) = (\sigma, s)$ ,  $f_1(\sigma, s) \subset (\Sigma - \sigma, S - s)$  をみたすものは存在しない。

**定理 18.7**  $M$  を、境界が空集合かまたは有限個の圧縮不可能曲面からなるハーケン多様体とする。このとき、 $M$  に理想的に埋め込まれたザイフェルト対  $(\Sigma, S) \subset (M, \partial M)$  で、次の条件 (\*) をみたすものが、 $M$  のアンビエントイソトピーを法として唯一つ存在する。

(\*)  $M$  に理想的に埋め込まれた任意のザイフェルト対  $(\Sigma', S') \subset (M, \partial M)$  に対して、アンビエントイソトピー  $\{f_t\} : (M, \partial M) \rightarrow (M, \partial M)$  で、 $f_0 = \text{id}$ ,  $f_1(\Sigma', S') \subset (\Sigma, S)$  となるものが存在する。

**【注意】** 定理 18.7 において、 $M$  がザイフェルト多様体 のときは  $(\Sigma, S) = (M, \partial M)$  であり、 $M$  が曲面上の  $I$  束  $p : M \rightarrow B$  のときは、 $(\Sigma, S) = (M, \text{cl}(\partial M - p^{-1}(\partial B)))$  である。 $M$  がザイフェルト多様体かまたは曲面上の  $I$  束ではない単純多様体であり、さらに適切に埋め込まれた本質的アニュラスを含まないときは、 $(\Sigma, S) = (\emptyset, \emptyset)$  である。

定理 18.7 で存在が保証されたザイフェルト対  $(\Sigma, S)$  を,  $M$  の特性ザイフェルト対とよぶ。条件 (\*) は特性ザイフェルト対の極大性を示している。この特性ザイフェルト対に対しては次が成り立つ。

**定理 18.8**  $M$  を境界が空集合か, または有限個の圧縮不可能曲面からなるハーケン多様体とし,  $(\Sigma, S)$  をその特性ザイフェルト対とする。このとき次の (1), (2) が成り立つ。

(1) 任意の非退化な写像  $f : (S^1 \times I, S^1 \times \partial I) \rightarrow (M, \partial M)$  に対して, ホモトピー  $\{f_t\} : (S^1 \times I, S^1 \times \partial I) \rightarrow (M, \partial M)$  で,  $f_0 = f, f_1(S^1 \times I) \subset \Sigma, f_1(S^1 \times \partial I) \subset S$  となるものが存在する。

(2) 任意の非退化な写像  $f : (S^1 \times S^1, \emptyset) \rightarrow (M, \partial M)$  に対して, ホモトピー  $\{f_t\} : (S^1 \times S^1, \emptyset) \rightarrow (M, \partial M)$  で,  $f_0 = f, f_1(S^1 \times S^1) \subset \Sigma$  となるものが存在する。

さて,  $(M, \partial M)$  をハーケン多様体対とし,  $(\Sigma, S)$  をその特性ザイフェルト対とする。 $(\Sigma, S)$  の成分で  $S^1$ -対であるもの全体を  $(\Sigma', S')$  とし  $\mathcal{T}' = \partial\Sigma'$  とおく。 $\mathcal{T}'$  は空集合かまたは有限個のトーラスの族である。この  $\mathcal{T}'$  に対して次の (1) ~ (4) の操作を行う。

- (1)  $\mathcal{T}'$  の連結成分の中に圧縮可能なトーラスがある場合は, それを  $\mathcal{T}'$  から取り除く。
- (2)  $\mathcal{T}'$  の連結成分の中に  $\partial M$  に含まれるものがある場合は, それを  $\mathcal{T}'$  から取り除く。
- (3)  $\mathcal{T}'$  の連結成分の中に互いに平行な二つのトーラスがある場合は, それらのうちのどちらか一方を  $\mathcal{T}'$  から取り除く。
- (4)  $\mathcal{T}'$  の連結成分の中に,  $\partial M$  には含まれないが  $\partial M$  と一部まじわるものがある場合は, それを  $M$  の内部に押し込んだものをあらためて  $\mathcal{T}'$  とする。

この操作を繰り返すことにより, 互いに平行なトーラスを含まない  $M$  内の本質的トーラスの族が得られる。これを  $\mathcal{T}$  とおく。定理 18.7 より, この  $\mathcal{T}$  によって  $M$  はザイフェルト多様体の部分と単純多様体の部分に分けられる。また特性ザイフェルト対の一意性から, こうして作られた  $\mathcal{T}$  はアンビエントイソトピーを法として一意である。この  $\mathcal{T}$  を  $M$  の特性トーラス族とよび,  $\mathcal{T}$  による  $M$  の分解, または  $M$  と  $\mathcal{T}$  の組  $(M, \mathcal{T})$  を,  $M$  のトーラス分解とよぶ。以上をまとめると次が得られた。

**系 18.9 (トーラス分解定理)**  $M$  を境界が空集合かまたは有限個の圧縮不可能曲面からなるハーケン多様体とする。 $M$  内の, 互いに交わらず平行でない有限個の本質的トーラスからなる族  $\mathcal{T}$  で, 次の条件 (1), (2) をみたすものが,  $M$  のアンビエントイソトピーを法として唯一つ存在する。

- (1)  $M$  を  $\mathcal{T}$  で切り開いた各連結成分は, ザイフェルト多様体かまたは単純多様体である。
- (2)  $\mathcal{T}$  の真部分集合で, 上記の条件 (1) をみたすものはない。

条件 (2) は, このような族の極小性を意味する。すなわち, 特性ザイフェルト対が極大なので, そのような分解を与える族は極小となるわけである。

【注意】 系 18.9 において,  $M$  がザイフェルト多様体かまたは単純多様体であるときは,

$\mathcal{T} = \emptyset$  である。

**例 3**  $B_1$  を特異点を二つもつ 2 次元円板とし,  $B_2$  を特異点を一つもつ 2 次元円板とする。また,  $B_1, B_2$  を底空間とするザイフェルト多様体を  $M_1, M_2$  とし,  $p_1 : M_1 \rightarrow B_1, p_2 : M_2 \rightarrow B_2$  をそれぞれの射影とする。 $\alpha_1, \alpha_2$  をそれぞれ  $\partial B_1, \partial B_2$  内の弧とし,  $A_1 = p_1^{-1}(\alpha_1), A_2 = p_2^{-1}(\alpha_2)$  とする。次に,  $B_0$  をクラインの壺から二つの 2 次元円板の内部をとりぞいた曲面とし,  $M_0$  を  $B_0$  上のひねり  $I$  束,  $p_0 : M_0 \rightarrow B_0$  をその射影とする。 $\partial B_0 = \alpha_0^1 \cup \alpha_0^2$  とし,  $A_0^1 = p_0^{-1}(\alpha_0^1), A_0^2 = p_0^{-1}(\alpha_0^2)$  とする。このとき  $A_1, A_2, A_0^1, A_0^2$  はすべてアニュラスなので,  $M_1, M_2, M_0$  から  $A_1$  と  $A_0^1, A_2$  と  $A_0^2$  とを貼り合わせて得られる多様体を  $M$  とする (図 18.3)。

$s_1 = \text{cl}(\partial M_1 - A_1), s_2 = \text{cl}(\partial M_2 - A_2)$  とおく。また,  $A_0^1, A_0^2$  の  $M_0$  における正則近傍を  $N(A_0^1), N(A_0^2)$  とし,  $M_3 = \text{cl}(M_0 - (N(A_0^1) \cup N(A_0^2)))$ ,  $s_3 = \text{cl}(\partial M_3 - (N(A_0^1) \cup N(A_0^2)))$  とおく。このとき,  $M$  の特性ザイフェルト対は,  $(M_1, s_1) \cup (M_2, s_2) \cup (M_3, s_3)$  となる。またその中の  $S^1$ -対は  $(M_1, s_1) \cup (M_2, s_2)$  である。したがって,  $T'_1 = \partial M_1, T'_2 = \partial M_2$  とおき,  $\mathcal{T}' = T'_1 \cup T'_2$  とおく。

ここで  $M_2$  はトーラス体であり  $T'_2$  は圧縮可能なので,  $\mathcal{T}'$  から  $T'_2$  を取り除く。また  $T'_1$  は  $\partial M$  と交わるので, それを  $M$  の内部に押し込んだトーラスを  $T_1$  とする。このとき,  $\mathcal{T} = T_1$  が  $M$  の特性トーラス族となる。

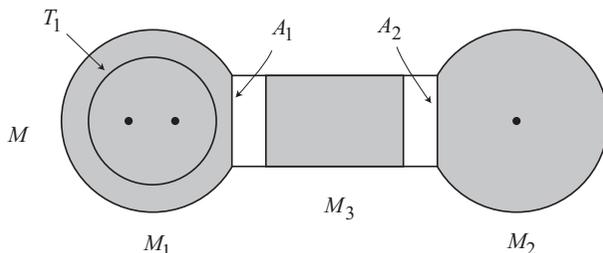


図 18.3

11 章において, 多様体の連結分解とヒーガード分解との関係について学んだことを思い出そう。そして, 種数  $g$  のヒーガード分解をもつ多様体の連結分解の分解成分の個数は,  $g$  以下であるということがわかった (系 11.16)。この系 11.16 は定理 11.15 からの系であるが, その定理の証明は, 多様体をもつヒーガード分解と, 本質的球面との交わりを A 型イソトピーという手法によって調べていくものであった。小林は, このジェイコによる A 型イソトピーという手法と, 落合 ([O2]) によって導入された, A 型イソトピーの逆操作という手法を駆使し, さらに深い洞察と議論を重ねることにより, ヒーガード分解とトーラス分解との関係について, 次の結果を得た。

**定理 18.10 ([Ko2])**  $M$  を境界が空集合であるようなハーケン多様体とする。 $M$  が種数  $g$  のヒーガード分解をもつならば,  $M$  のトーラス分解の分解成分の個数は  $3g - 3$  以下である。

さらに、任意の  $g > 1$  に対して、種数  $g$  のヒーガード分解をもつハーケン多様体で、トーラス分解の分解成分の個数が、ちょうど  $3g - 3$  であるものが存在する。

【注意】 [Ko2] では、 $M$  の境界が有限個の圧縮不可能なトーラスからなる場合に対しても、同様の結果を示している。しかし本書では、ヒーガード分解は閉多様体に対してのみ定義しているため、 $\partial M = \emptyset$  という制限を付けた。

定理 18.10 は、任意の種数  $g > 1$  のヒーガード分解をもつハーケン多様体に関する結果であるが、特に  $g = 2$  のときは、[Ko1] において、トーラス分解の構造と、分解成分として現れる多様体の構造が詳しく説明されている。また本書は、向き付け可能な 3 次元多様体のみを考察の対象としているが、向き付け不可能な 3 次元多様体に対しても、ハンドル体やヒーガード分解、そしてトーラス分解（この場合はクラインの壺による分解も含む）が定義される。そのような多様体のヒーガード分解とトーラス分解との関係についての研究には、[Mo1] 等がある。

#### 18.4 トーラス分解定理の証明

本節において、系 18.9 のハッチャー ([Ht]) による証明を紹介する。

**命題 18.11**  $M$  をコンパクトな向き付け可能既約 3 次元多様体とすると、 $M$  は系 18.9 の条件 (1), (2) をみたす本質的トーラスの族  $\mathcal{T}$  をもつ。

**証明**  $M$  が単純多様体のときは  $\mathcal{T} = \emptyset$  とする。

$M$  が本質的トーラスを含むとき、それを  $T_1$  とし、 $M$  を  $T_1$  で切り開いて得られる 3 次元多様体を  $M_1$  とする。 $M_1$  が本質的トーラスをもたないならば  $\mathcal{T}'_1 = T_1$  とする。 $M_1$  が本質的トーラスをもつならばそれを  $T_2$  とし、 $M_1$  を  $T_2$  で切り開いて得られる 3 次元多様体を  $M_2$  とする。次に、 $M_2$  が本質的トーラスをもたないならば  $\mathcal{T}'_2 = T_1 \cup T_2$  とする。 $M_2$  が本質的トーラスをもつならばそれを  $T_3$  とし、 $M_2$  を  $T_3$  で切り開いて得られる 3 次元多様体を  $M_3$  とする。

以下同様に続けると、ハーケンの有限性定理（補題 13.12）よりこの操作は有限回で終了し、 $M$  内の互いに平行でない本質的トーラスの族  $\mathcal{T}'_n = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$  で、 $M$  を  $\mathcal{T}'_n$  で切り開いて得られる 3 次元多様体の連結成分を  $N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_m$  とすると、各  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) は本質的トーラスを含まない、というものが得られる。

ここで  $\mathcal{T}'_n$  の連結成分  $T_k$  で、次の条件 (\*) をみたすものがあつたとする。

(\*)  $T_k$  を境界に含む  $N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_m$  の連結成分を  $N_i, N_j$  とすると ( $N_i = N_j$  の可能性もある)、 $N_i$  と  $N_j$  を  $T_k$  で貼り合わせて得られる 3 次元多様体  $N_i \cup_{T_k} N_j$  は、ザイフェルト多様体。

このとき、 $\mathcal{T}'_n$  から  $T_k$  を取り除いて得られるトーラスの族を  $\mathcal{T}''_{n-1}$  とする。またそのような連結成分がないときは、 $\mathcal{T} = \mathcal{T}'_n$  とする。次に、 $\mathcal{T}''_{n-1}$  で  $M$  を切り開いて得られる 3 次元多様体を考え、 $\mathcal{T}''_{n-1}$  の中に上記の条件をみたすものがあつたときは、それを取り除いて

$\mathcal{T}''_{n-2}$  とおき、ないときは  $\mathcal{T} = \mathcal{T}''_{n-1}$  とする。

この操作は  $n$  回までで終了し、条件 (1),(2) をみたくトーラスの族  $\mathcal{T}$  が得られる。  $\square$

**補題 18.12**  $M$  をコンパクトな向き付け可能既約 3 次元多様体とし、さらに単純多様体とする。 $M$  が適切に埋め込まれた本質的アニュラス  $A$  を含み、なおかつ  $\partial A$  と交わる  $\partial M$  の連結成分はトーラスとすると、 $M$  はザイフェルト多様体であり、 $A$  をファイバーの和とするようなファイバー構造をもつ。

**証明** 仮定より、 $\partial A$  の二つの連結成分は、 $\partial M$  の一つのトーラス  $T_0$  に含まれるか、または二つのトーラス  $T_1, T_2$  に含まれる。 $A \cup T_0$  または  $A \cup T_1 \cup T_2$  の  $M$  における正則近傍を  $N$  とする (図 18.4)。ここで、 $F_0^3$  を 2 次元球面から三つの 2 次元円板の内部を取り除いた曲面とし、 $N_1^2$  を射影平面から二つの 2 次元円板の内部を取り除いた曲面とすると、 $N$  は  $F_0^3 \times S^1$  かまたは  $N_1^2 \tilde{\times} S^1$  に同相である (問題 18.7)。

$T$  を  $\partial N - \partial M$  の一つの連結成分とする。 $T$  はトーラスである。 $T$  が圧縮可能ならば、 $M$  が既約であることから、 $M$  内のトーラス体  $V$  で  $\partial V = T$  となるものが存在する。 $T$  が圧縮不可能ならば、 $M$  が単純であることから、 $T$  は  $\partial M$  のある連結成分に平行である。以上より、図 18.4 の各場合について考察することより、 $M$  は  $A$  をファイバーの和とするようなザイフェルト多様体となる (問題 18.7)。  $\square$

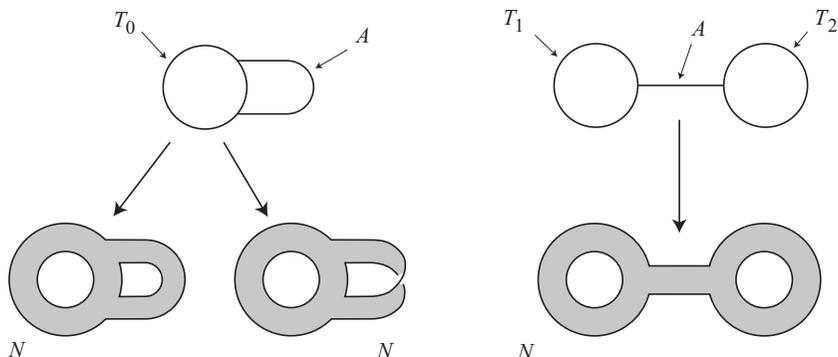


図 18.4

**問題 18.7** 補題 18.12 の証明において、 $N$  が  $F_0^3 \times S^1$  かまたは  $N_1^2 \tilde{\times} S^1$  に同相となることを示せ。また、 $M$  はどのようなザイフェルト多様体になるか具体的に示せ。

**補題 18.13**  $M$  をザイフェルト多様体とし  $\partial M \neq \emptyset$  とする。このとき以下が成り立つ。

(1)  $M$  内の本質的トーラスは、ファイバーの和であるようなトーラスにアンビエントイソトピックである。

(2)  $M$  内の本質的アニュラスは、 $M$  が、 $S^1 \times S^1 \times I$  かまたは  $K \tilde{\times} I$  でないときは、ファイバーの和であるようなアニュラスにアンビエントイソトピックである。また、 $M$  が  $S^1 \times S^1 \times I$  かまたは  $K \tilde{\times} I$  のときは、必要ならばファイバー構造をとりかえることにより、 $M$  は、与えられたアニュラスがファイバーの和となるようなファイバー構造をもつ。

**証明** (1)  $T$  を  $M$  内の本質的トーラスとする。定理 17.4 の結論において (2), (3) または (4) の可能性があるが,  $\partial M \neq \emptyset$  より (4) が成り立つ。よって  $T$  はファイバーの和であるようなトーラスにアンビエントイソトピックである。

(2)  $A$  を  $M$  内の本質的アニュラスとする。定理 17.4 の結論において (1) が成り立つとき。補題 18.12 の証明と同様の議論により,  $A$  はファイバーの和であるようなアニュラスにアンビエントイソトピックである。定理 17.4 の (2) または (3) が成り立つとき。命題 16.1 および問題 16.6 より  $M \cong S^1 \times S^1 \times I$  かまたは  $M \cong K \tilde{\times} I$  であり, ファイバー構造を取りかえることにより,  $A$  はファイバーの和であるようなアニュラスとなる。定理 17.4 の (4) が成り立つとき。  $A$  はファイバーの和であるようなアニュラスにアンビエントイソトピックである。  $\square$

**系 18.9 の証明** 命題 18.11 より, 系 18.9 において, 条件 (1), (2) をみたすトーラスの族は,  $M$  のアンビエントイソトピーを法として唯一つであることを示せばよい。

$\mathcal{T} = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$  を,  $M$  内の互いに交わらず平行でない本質的トーラスの族で,  $M$  をザイフェルト多様体かまたは単純多様体に分解し, なおかつ  $\mathcal{T}$  の真部分集合はそのような性質をもたないとする。また,  $\mathcal{T}' = T'_1 \cup T'_2 \cup \dots \cup T'_m$  をやはりそのような条件をみたすトーラスの族とする。  $\mathcal{T}$  と  $\mathcal{T}'$  がアンビエントイソトピックであることを,  $n$  についての数学的帰納法で示す。

$n = 0$  のとき。  $\mathcal{T} = \emptyset$  であり  $M$  はザイフェルト多様体かまたは単純多様体である。よって  $\mathcal{T}' = \emptyset$  であり  $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$  である。

$n > 0$  とし, 条件 (1), (2) をみたすような  $n - 1$  個以下のトーラスからなる族をもつ多様体に対しては, 結論が成り立つと仮定する。

**副補題 18.14**  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}' = \emptyset$  としてよい。

**証明**  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}' \neq \emptyset$  とする。一般の位置の議論より,  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$  の各連結成分は円周としてよい。また  $M$  の既約性と  $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$  の圧縮不可能性より,  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$  の連結成分は,  $\mathcal{T}$  上および  $\mathcal{T}'$  上で本質的としてよい。

$C$  を  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$  の一つの連結成分とする。ある  $i$  と  $j$  に対して  $C \subset T_i \cap T'_j$  である。  $M$  の  $\mathcal{T}$  による分解成分のうち,  $T_i$  をその境界に含むものを  $M_k, M_\ell$  とする ( $M_k = M_\ell$  の可能性もある)。  $M_k \cap T'_j, M_\ell \cap T'_j$  の連結成分のアニュラスで  $C$  を一つの境界とするものをそれぞれ  $A_k, A_\ell$  とする ( $A_k = A_\ell$  の可能性もある) (図 18.5)。

$A_k, A_\ell$  は  $M_k, M_\ell$  に適切に埋め込まれた圧縮不可能アニュラスである。  $A_k$  または  $A_\ell$  が,  $M_k$  または  $M_\ell$  において境界平行ならば,  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$  の連結成分  $C$  をはずすことができるので,  $A_k, A_\ell$  は  $M_k, M_\ell$  においてともに本質的としてよい。このとき補題 18.12 より  $M_k, M_\ell$  はともにザイフェルト多様体である。しかも補題 18.13(2) より, 必要ならば  $M_k, M_\ell$  のファイバー構造をとりかえることにより,  $C$  はそれぞれの正則ファイバーとできる。よって  $M_k \cup M_\ell$  は一つのザイフェルト多様体となり,  $\mathcal{T} - \{T_i\}$  は系 18.9 の条件 (1) をみたすトーラス族である。これは  $\mathcal{T}$  の極小性に矛盾する。よって  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}' = \emptyset$  としてよいことが示さ

れた。

□

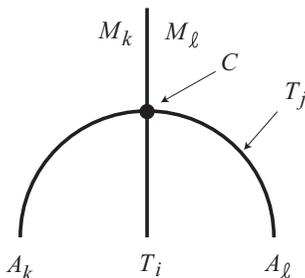


図 18.5

さて、 $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}' = \emptyset$  より  $T'_1$  は、 $\mathcal{T}$  による  $M$  のある分解成分  $M_j$  に含まれる。 $M_j$  が単純多様体ならば、 $T'_1$  は  $\partial M_j$  のある連結成分に平行である。すなわち、 $T'_1$  はある  $T_i$  にアンビエントイソトピックである。よって  $M$  を  $T'_1 = T_i$  で切り開いて得られる 3次元多様体を  $M'$  とし、 $\mathcal{T} - \{T_i\}$ ,  $\mathcal{T}' - \{T'_1\}$  というトーラスの族を考えると、帰納法の仮定より  $\mathcal{T} - \{T_i\}$  と  $\mathcal{T}' - \{T'_1\}$  は  $M'$  においてアンビエントイソトピックである。したがって、 $\mathcal{T}$  と  $\mathcal{T}'$  は  $M$  においてアンビエントイソトピックである。

次に  $M_j$  をザイフェルト多様体とする。また  $M$  の  $\mathcal{T}'$  による分解成分のうち、 $T'_1$  をその境界に含むものを  $M'_k, M'_\ell$  とする ( $M'_k = M'_\ell$  の可能性もある)。

はじめに  $M'_k \neq M'_\ell$  の場合を考える。ある  $T_i$  が  $M'_k$  に含まれるならば (図 18.6(1)),  $M_j$  が単純多様体であるときと同様の議論により、 $M'_k$  はザイフェルト多様体としてよい。 $\mathcal{T}$  のどのトーラスも  $M'_k$  に含まれないときは (図 18.6(2)),  $M'_k \subset M_j$  である。このとき補題 18.13(1) より、 $\partial M'_k$  の連結成分はすべて  $M_j$  のファイバーの和であるようなトーラスとしてよい。よってやはり  $M'_k$  はザイフェルト多様体である。

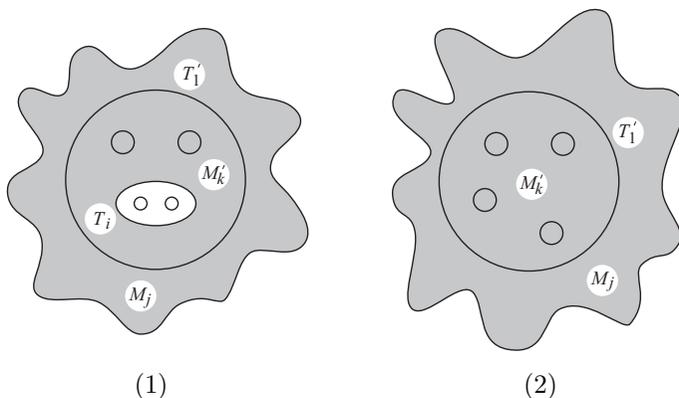


図 18.6

また、 $M'_\ell$  に対しても同様の考察を行うことにより、 $M'_\ell$  もザイフェルト多様体としてよ

い。しかも  $T'_1$  はザイフェルト多様体  $M_j$  のファイバーの和となるようなトーラスである。

$M'_k, M'_\ell$  のファイバー構造が,  $M_j$  のそれと一致している場合は,  $M'_k \cup M'_\ell$  もザイフェルト多様体となり,  $\mathcal{T}'$  の極小性に矛盾する。 $M'_k$  のファイバー構造が  $M_j$  のそれと一致しないとき,  $M'_k \cap M_j$  は二つ以上のイソトピックでないファイバー構造を許容する。このとき定理 17.3 より,  $M'_k \cap M_j$  は,  $S^1 \times S^1 \times I$  か  $S^1 \times D^2$  かまたは  $K \tilde{\times} I$  である。

$S^1 \times S^1 \times I$  のとき,  $\partial M'_k \cap M_j = T'_1 \cup T$ , ただし  $T = T_i$  または  $T'_j$  である。 $T = T_i$  のときは,  $T_i$  が  $T'_1$  にアンビエントイソトピックであることより, 帰納法の仮定から結論が成り立つ。 $T = T'_j$  のときは,  $T'_1$  と  $T'_j$  が互いに平行でないことに矛盾する。

$S^1 \times D^2$  のとき,  $M'_k = S^1 \times D^2$  となり,  $T'_1$  が圧縮不可能であることに矛盾する。

$K \tilde{\times} I$  のとき,  $M'_k = K \tilde{\times} I$  となる。このとき  $M'_k$  のファイバー構造をとりかえることにより,  $M_j$  のそれと一致させることができる。

$M'_\ell$  についても同様の考察を行うと,  $M'_\ell \cap M_j \cong S^1 \times S^1 \times I$  のときは結論が成り立つ。 $M'_\ell \cap M_j \cong S^1 \times D^2$  のときは矛盾である。 $M'_\ell \cap M_j \cong K \tilde{\times} I$  のときは  $M'_\ell$  のファイバー構造を  $M_j$  のそれと一致させることができる。よって  $M'_k \cup M'_\ell$  はザイフェルト多様体となり,  $\mathcal{T}'$  の極小性に矛盾する。したがって  $M'_k \neq M'_\ell$  のときは定理の結論が成り立つことが示された。

$M'_k = M'_\ell$  の場合は読者に委ねる (問題 18.8)。 □

**問題 18.8** 系 18.9 の証明の  $M'_k = M'_\ell$  の場合を示せ。

【注意】 系 18.9 の証明において,  $M$  の境界が圧縮不可能であるという条件は使われていないことに注意されたい。すなわち, 系 18.9 はコンパクトな向き付け可能既約 3 次元多様体に対して成り立つ。ただし, 定理 18.7 および定理 18.8 から  $M$  の境界が圧縮不可能であるという条件を取り除くことはできない。

# 付録

## トーラスの写像類群

$X$  を、連結でコンパクトな  $n$  次元多様体とする。 $X$  の自己同相写像全体は、写像の合成を積として群をなす。これを  $\text{Homeo}(X)$  と書く。次に  $\text{Homeo}(X)$  の元で、 $X$  上の恒等写像にイソトピックなもの全体を  $\text{Id}(X)$  と書く。 $\text{Id}(X)$  もやはり写像の合成を積として群となる。しかも  $\text{Homeo}(X)$  の正規部分群である。よって、 $\text{Homeo}(X)$  の  $\text{Id}(X)$  による剰余類群  $\text{Homeo}(X)/\text{Id}(X)$  を考えることができる。これを  $X$  の写像類群とよび、 $\mathcal{M}(X)$  と書く。また  $X$  が向き付け可能であるとき、 $X$  の向きを保存する自己同相写像全体からなる群を  $\text{Homeo}^+(X)$  とし、 $\text{Homeo}^+(X)$  の  $\text{Id}(X)$  による剰余類群を、 $\mathcal{M}^+(X)$  と書く。これを  $X$  の向きを保存する写像類群とよぶ。このとき  $\mathcal{M}^+(X)$  は、 $\mathcal{M}(X)$  の指数 2 の部分群である。

さて、 $F$  を曲面（連結でコンパクトな 2 次元多様体）とする。 $F$  の写像類群はよく研究されており、[4] に詳しく述べられている。

たとえば  $D^2$  を 2 次元円板とすると、定理 2.18 より  $\mathcal{M}(D^2) \cong \mathbf{Z}_2$  であり、 $\mathcal{M}^+(D^2) \cong \{1\}$  である。また  $S^2$  を 2 次元球面とすると、 $\mathcal{M}(S^2) \cong \mathbf{Z}_2$ 、 $\mathcal{M}^+(S^2) \cong \{1\}$  である。さらに  $A$  をアニュラスとすると、命題 16.1 より、 $\mathcal{M}(A) \cong \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ 、 $\mathcal{M}^+(A) \cong \mathbf{Z}_2$  である。

以下でトーラスの写像類群が、整数上の 2 次正則行列全体が作る群に同型であることを示す。トーラスの写像類群については、[14] に詳しく解説されている。

$T$  をトーラスとし、 $f$  を代表元とする  $\mathcal{M}(T)$  の元を  $[f]$  と書く。 $f$  から導かれる  $\pi_1(T)$  の自己同型写像を  $f_*$  とすると、 $\pi_1(T) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  なので、 $f_*$  は整数上の 2 次可逆行列で表される。それを同じ記号で  $f_*$  と書く。

$$GL(2, \mathbf{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \mid p, q, r, s \in \mathbf{Z}, ps - qr = \pm 1 \right\}$$

とおく。このとき上記のことから、 $[f] \in \mathcal{M}(T)$  に対して、 $f_* \in GL(2, \mathbf{Z})$  という対応が定義される。

ここで、 $T = S^1 \times S^1 = \{(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \mid \theta, \varphi \text{ は実数}\}$  と表し、 $T$  上の三つの自己同相写像  $f_\ell, f_m, f_r$  を以下のように定める。

$$\begin{aligned} f_\ell &: (e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \mapsto (e^{i(\theta+\varphi)}, e^{i\varphi}) \\ f_m &: (e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \mapsto (e^{i\theta}, e^{i(\varphi+\theta)}) \\ f_r &: (e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \mapsto (e^{i(2\pi-\theta)}, e^{i\varphi}) \end{aligned}$$

$f_\ell$  はロンジチュード方向に 1 回ひねる自己同相写像、 $f_m$  はメリディアン方向に 1 回ひね

る自己同相写像,  $f_r$  は折り返しである (図 A.1)。またこれらに対応する行列は,

$$f_{\ell*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_{m*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_{r*} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

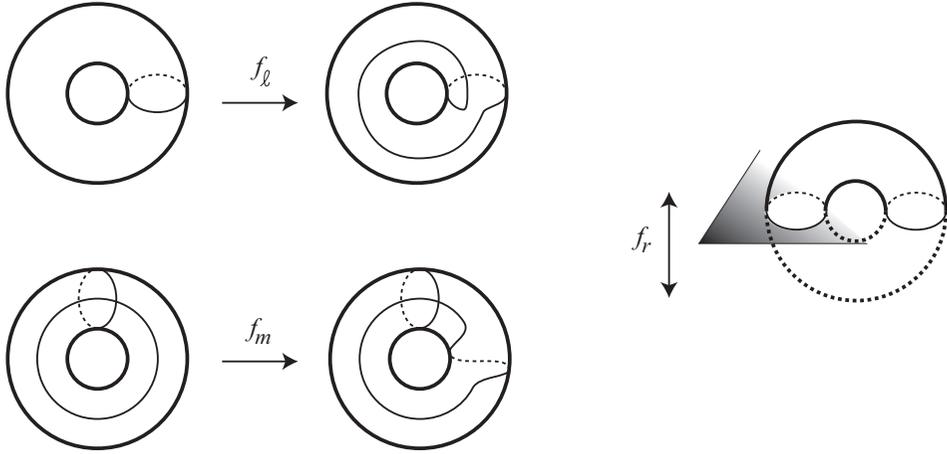


図 A.1

**定理 A.1** 対応  $*$ :  $\mathcal{M}(T) \ni [f] \mapsto f_* \in GL(2, \mathbf{Z})$  は同型写像である。

**証明**  $T$  上の自己同相写像  $f$  と  $g$  がイソトピックならば,  $f_* = g_*$  なので, 上記の対応はイソトピー類の代表元のとり方によらない。また, この対応が準同型写像であることはあきらかである。

次に,  $GL(2, \mathbf{Z})$  の任意の元は,  $f_{\ell*}, f_{m*}, f_{r*}$  という三つの行列とその逆行列の有限個の積で表されることから (問題 A.1), 上記の対応は全射である。

最後に単射であることを示す。そのために,  $f_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする。このとき  $f$  が  $T$  上の恒等写像にイソトピックであればよい。

$\ell, m$  をそれぞれ  $T$  のロンジチュードとメリディアンとする。 $f(\ell)$  は  $\ell$  にホモトピックなので, 補題 8.3 より,  $f(\ell)$  は  $\ell$  にアンビエントイソトピックである。よって  $f(\ell) = \ell$  としてよいが, さらに  $f_*$  が単位行列であることより,  $f|_{\ell} : \ell \rightarrow \ell$  は恒等写像としてよい。このとき再び補題 8.3 より,  $f(m)$  は  $\ell$  と  $m$  との交点  $\ell \cap m$  を止めたままで  $m$  にアンビエントイソトピックである。よって同様の議論により,  $f|_{\ell \cup m} : \ell \cup m \rightarrow \ell \cup m$  は恒等写像としてよい。したがって,  $N(\ell \cup m)$  を  $\ell \cup m$  の正則近傍とすると, 定理 2.4 と定理 2.18 を用いることにより,  $f(N(\ell \cup m)) = N(\ell \cup m)$  であり,  $f$  は  $N(\ell \cup m)$  上の恒等写像にイソトピックとできる。ここで,  $D = \text{cl}(T - N(\ell \cup m))$  とおく。 $D$  は 2次元円板である。このとき定理 2.18 より,  $f|_D$  は  $D$  上の恒等写像にイソトピックである。従って  $f$  は  $T$  上の恒等写像にイソトピックとなる。すなわち上記の対応  $*$  は単射であり, 定理の証明が終わる。  $\square$

$$SL(2, \mathbf{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \mid p, q, r, s \in \mathbf{Z}, ps - qr = 1 \right\}$$

とおく。 $SL(2, \mathbf{Z})$  は  $GL(2, \mathbf{Z})$  の指数 2 の部分群である。 $T$  をトーラスとすると、定理 A.1 より次を得る。

**系 A.2** (1)  $\mathcal{M}(T) \cong GL(2, \mathbf{Z})$

(2)  $\mathcal{M}^+(T) \cong SL(2, \mathbf{Z})$

**問題 A.1** (1)  $SL(2, \mathbf{Z})$  の任意の元は、 $f_{\ell^*}, f_{m^*}$  という二つの行列とその逆行列の有限個の積で表されることを示せ。

(2)  $GL(2, \mathbf{Z})$  の任意の元は、 $f_{\ell^*}, f_{m^*}, f_{r^*}$  という三つの行列とその逆行列の有限個の積で表されることを示せ。

## 参考文献・あとがき

- [1] 加藤十吉：組合せ位相幾何学, 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 1976
- [2] 河内明夫：結び目理論, シュプリンガー・フェアラーク東京(株), 1990
- [3] 小島定吉：多角形の現代幾何学, 牧野書店, 1993
- [4] 鈴木晋一：曲面の線形トポロジー(上下), 槇書店, 1986
- [5] 鈴木晋一：結び目理論入門, サイエンス社, 1991
- [6] 谷口雅彦・松崎克彦：双曲的多様体とクライン群, 日本評論社, 1993
- [7] 田村一郎：トポロジー, 岩波全書 276, 岩波書店, 1972
- [8] 服部晶夫：位相幾何学 I, II, III, 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 1976
- [9] 本間龍雄：組合せ位相幾何学, 共立全書 231, 共立出版 1980
- [10] 本間龍雄：ポアンカレ予想物語, 数セミ・ブックス 13
- [11] J. Hempel : 3-manifolds, Ann. Math. Studies 86, Princeton University Press, 1976
- [12] W. Jaco : Lectures on Three Manifold Topology, Conference board of Math. No. 43, 1980
- [13] K. Johannson : Topology and Combinatorics of 3-manifolds, Lecture Notes in Mathematics 1599, Springer-Verlag, 1995
- [14] D. Rolfsen : Knots and Links, Math. Lecture Series 7, Publish of Perish Inc. 1976
- [15] P. Orlik : Seifert Manifolds, Lecture Notes in Mathematics 291, Springer-Verlag, 1972
- [16] P. Scott : The geometries of 3-manifolds, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 401-487

[1] は単体分割や単体写像, 及び正則近傍などについて詳しく書かれてあります。[2] は結び目理論全般の書であり, 3次元多様体論と平行して結び目理論を学ぼうという読者は, 辞書的な意味も含めて座右におかれておくとういでしょう。[5] は結び目理論のやさしい入門書です。[4] は曲面の分類や, 本書では触れなかった, ハンドル体の自己同相写像について述べられています。[3], [6] は双曲多様体について丁寧に書かれています。3次元双曲幾何学を学ぼうという読者には, よい教科書となるでしょう。[7] は基本群やホモロジー群のことが, やさしく書かれています。[8] は代数的位相幾何学全般の書です。[9] は本書では触れなかつ

た,  $S^3$  のヒーガード分解の一意性や, 任意の3次元多様体のヒーガード分解の, 安定同値性の証明が述べられています。[10] はポアンカレ予想をめぐる様々な話題が, 歴史的背景も含めて述べられています。

[11], [12] は3次元多様体論の, [14] は3次元多様体論と結び目理論の教科書として, 世界的に定評のある本です。本書を書くに際して, [11], [12] はたいへん参考にさせていただきました。[13] はハンドル体とヒーガード分解に関する, 精密な研究結果が述べられています。[15] はザイフェルト多様体の全般的な解説書です。[16] は3次元多様体の幾何構造について, ていねいに書かれてあります。

本書を執筆するにあたり, 上記の文献及び以下に紹介する文献を含め, 多くの文献を参考にさせていただきました。それらの著者の方々には, 心より感謝いたします。また著者が3次元多様体論を学ぶにあたり, 細川藤次先生, 鈴木晋一先生はじめ, 多くの方々に御指導していただきましたことを, 心より感謝いたします。

#### 論文等

- [A] J. W. Alexander : On the subdivision of 3-space by a polyhedron, Proc. N.A.S., U.S.A., vol. 10 (1924), 6-8
- [B-Z] M.Boileau and H.Zieschang : Heegaard genus of closed orientable Seifert 3-manifolds, Invent. Math., vol. 76 (1984), 455-468
- [Bn] F. Bonahon : Deffeotopies des espaces lenticulaires, Topology, vol. 22 (1983), 305-314
- [Br] E. J. Brody : The topological classification of the lens spaces, Ann. of Math., vol. 71 (1960), 163-184
- [Bw] M. Brown : A proof of the generalized Schöenflies theorem, Bull. A.M.S., vol. 66 (1960), 74-76
- [C-G-L-S] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Lueke and P. B. Shalen : Dehn surgery on knots, Ann. of Math., vol. 115 (1987), 237-300
- [D] M. Dehn : Uber die Topologie des dreidimensionalen Raumes, Math. Ann., vol. 69 (1910), 137-168
- [Ep1] D. B. A. Epstein : Projective planes in 3-manifolds, Proc. London Math. Soc. vol. 11 (1961), 469-484
- [Ep2] D. B. A. Epstein : Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta. Math., vol. 115 (1966), 83-107
- [Ga1] D. Gabai : Foliations and the topology of 3-manifolds III, J. Diff. Geometry, vol. 26 (1987), 479-536
- [Ga2] D. Gabai : Convergence groups are Fuchsian groups, Ann. of Math., vol. 136 (1992), 447-510
- [G-L] C. McA. Gordon and J. Lueke : Knots are determined by their complements,

- J. A. M. S. vol. 2 (1989), 371-415
- [Ha1] W. Haken : Theorie der Normal Flächen, Acta. Math., vol. 105 (1961), 245-375
- [Ha2] W. Haken : Some results on surfaces in 3-manifolds, Studies in Modern Topology, MAA. Studies in Math. 5 (1968), 39-98
- [Ht] A. Hatcher : Private lecture notes Ch. III, Torus decomposition
- [Hm] T. Homma : On Dehn's lemma for  $S^3$ , Yokohama Math. J., vol. 5 (1957), 223-224
- [H-O-T] T. Homma, M. Ochiai and M. Takahashi : An algorithm for recognizing  $S^3$  in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus two, Osaka Math. J., vol. 17 (1980), 625-648
- [J-S] W. Jaco and P. Shalen : Seifert fibered spaces in 3-manifolds, Memoirs A. M. S. 21 (1979)
- [Jo] K. Johansson : Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundary, Lecture notes in Mathematics 761, Springer-Verlag, 1979
- [Kn] H. Kneser : Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Manigfaltigkeiten, Jahresbericht der Deut. Math. Verein., 38 (1929), 248-260
- [Ko1] T. Kobayashi : Structures of the Haken manifolds with Heegaard splittings of genus two, Osaka J. Math., vol. 21 (1984), 437-455
- [Ko2] T. Kobayashi : Structures of full Haken manifolds, Osaka J. Math., vol. 24 (1987), 173-215
- [Mi] J. Milnor : A unique factrization theorem for 3-manifolds, Amer. J. Math. 84 (1962), 1-7
- [Mo1] K. Morimoto : Structures of non-orientable closed 3-manifolds of genus two, Kobe J. Math., vol. 4 (1987), 51-72
- [Mo2] K. Morimoto : A note on Heegaard splittings of non-orientable surface bundles over  $S^1$ , Proc. Japan Academy, vol. 62 (1986), 341-342
- [Mo3] K. Morimoto : On minimum genus Heegaard splittings of some orientable closed 3-manifolds, Tokyo J. Math., vol.12 (1989), 321-355
- [O1] M. Ochiai : Heegaard splittings of  $F \times S^1$ , Yokohama Math. J., vol. 25 (1977), 109-112
- [O2] M. Ochiai : On Haken's theorem and its extension, Osaka J. Math., vol. 20 (1983), 461-468
- [O-T] M. Ochiai and M. Takahashi : Heegaard diagrams of torus bundles over  $S^1$ , Comment. Math. Univ. S. Paul., vol. 31 (1982), 63-69
- [Pa1] C. D. Papakyriakopoulos : On Dehn's lemma and tha asphericity of knots, Ann. of Math., vol. 66 (1957), 1-26
- [Pa2] C. D. Papakyriakopoulos : On solid tori, Proc. London Math. Soc., VII (1957),

281-299

- [Po1] H. Poincaré : Second complément à l'Anlysis Situs, Proc. London Math. Soc., vol. 32 (1900), 277-308
- [Po2] H. Poincaré : Cinquième complément à l'Analysis Situs, Rend. Circ. Math. Palermo, vol. 18 (1904), 45-110
- [Sa1] M. Sakuma : Surface bundles over  $S^1$  which are 2-fold branched cyclic coverings of  $S^3$ , Math. Semi. Notes, vol. 9 (1981), 159-180
- [Sa2] M. Sakuma : Involutions on torus bundles over  $S^1$ , Osaka J. Math. vol. 22 (1985), 163-185
- [Scha] M. Scharlemann : Tunnel number one knots satisfy the Poenaru conjecture, Topology Appl. vol.18 (1984), 235-258
- [Schö] A. Schönflies : Beitrage zur Theorie der Punktmengen III, Math. Ann., vol. 62 (1906), 286-328
- [Se] H. Seifert : Topologie dreidimensionaler gefaserner Raume, Acta Math., vol. 60 (1933), 147-288
- [St] J. Stallings : On the loop theorem, Ann. Of Math. vol. 72 (1960), 12-19
- [Wa1] F. Waldhausen : On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. vol.87 (1968), 56-88
- [Wa2] F. Waldhausen : Some problems on 3-manifolds. Proc. Symposia in Pure Math., vol. 32 (1978), 313-322
- [Ze] E. C. Zeemann : Seminar on combinatorial topology, (Mimeographed Note), I.E.H.S

## 電子版 あとがき (ポアンカレ予想の解決)

21世紀になったばかりの、2002年頃、ポアンカレ予想が解かれたらしい、という噂が数学者の間を駆け巡りました。

私がポアンカレ予想を身近に感じたのは、大学院博士課程の学生であった1986年頃、イギリスの二人の数学者がポアンカレ予想を解いたと言っているらしい、という知らせが入り、そのプレプリント（正式論文になる前の原稿）が出回ったころでした。そこで、その当時大阪大学におられた小林毅さんが中心となって、プレプリントの読み合わせが行われました。議論は、本書でも紹介したヒューガード分解を用いた証明であり、与えられた多様体のヒューガード分解を考え、基本群が自明な群であることを用いて、種数を落とし、最後に種数0の $S^3$ になることを示すという手法でした。しかし、細かい議論において、どうしても追追できないところがあり、どうしたものかと悩んでいる内に、世界の各所で（特にアメリカで）、議論に不備があるということになり、そのまま立ち消えになってしまいました。また、1989年頃、フランスの数学会に出席した折、フランスの数学者が、ポアンカレ予想の解決について長時間の講演を行っていましたが、聴衆はあまり信憑性を感じていないようでした。歴史をひもとくと、プリンストン大学において、パパキリヤコプーロスとその後を追いかけるハーケンが熾烈な競争を続け、その“証明”を巡って、厳しいやりとりがあったことは、あまりに有名な伝説となっています。

このように、ポアンカレ予想を巡っては、さまざまな“証明”が現れては消えておりました。しかし、冒頭の噂については、今回は本当に解けたようだ、しかも、ポアンカレ予想を凌駕するサーストンの幾何化予想が解かれたらしい。さらにその手法は、従来の組合せ的な手法とは全く異なり、物理学の知識を用いた解析的手法で解かれたらしい、ということでした。トポロジーの問題がトポロジーとは全く異なる手法で解かれた（らしい）ということで、トポロジストはお手上げの状態、成り行きを見守るしかありませんでした。そうこうしている内に、2004年頃、確かに解けたようだという、単なる噂ではない、かなり信憑性のある情報が流れるようになりました。ところが、解いたという本人である、ロシア人のペレルマンという人物がどのような人か、全くもって分かりません。ポアンカレ予想を解けば、間違いなくフィールズ賞の受賞対象になるでしょうから、2006年の国際数学会議でどのような講演をするのであろうか、ということが関心の的になっていました。

2006年8月22日、スペイン・マドリッドの国際会議場で4年に1度の国際数学会議が開催され、開会式において、フィールズ賞の受賞者が紹介されました。私は、その会議場の2階奥の席でじっとその時を待っていました。司会者が、ペレルマンにフィールズ賞を授与

することを会場全体に告げました。しかし、ペレルマンは一向に現れません。そして、しばらくした後、司会者から、「ペレルマンは受賞を辞退し、この会場には現れません」と告げられると、会場全体にどよめきともため息とも言えぬ空気が流れました。実は、ペレルマンは受賞を辞退するらしいという噂は、会議の前から流れていましたが、実際にその事実を目の当たりにすると、改めて研究者にとっての賞というものの意味を、考えさせられました。

同日夕刻、マドリッドの国際会議場は、異様な熱気に包まれていました。というのは、ハミルトンが「ポアンカレ予想」というタイトルで講演を行うからです。実のところ、ペレルマンによる解決は、ハミルトンが示した方向に沿って議論を進めた結果であることは、多くの人の知るところでした。司会者は、「本国際会議の真のヒーローである」とハミルトンを紹介し、会場全体から割れんばかりの拍手が起こったことを、今でも鮮明に記憶しています。そして私は、ペレルマンのフィールズ賞辞退とハミルトンの講演に接し、歴史が動く様を直接見ることができたことに、深い感動を覚えていました。

さて、未解決問題が長期間解決されない場合、それまでの方法ではどんなに努力しても解決されないわけですから、全く新しい発想や方法が必要になります。たとえば、ギリシャ数学三大難問における角の三等分問題を振り返ってみましょう。これは「与えられた角を定規とコンパスで三等分する一般的な方法を見つけよ」という問題ですが、おそらくギリシャの人々は、平面に様々な円や線分を描き、ありとあらゆる事を考え、悩み、数々の間違っただ方法を“発見”したことでしょう。しかしこの問題は、17世紀デカルトが平面に座標を導入し、座標幾何学による方程式の問題に帰着され、さらに、円が2次方程式で与えられることから、一般的な3次方程式の解は有理数体上の2次拡大の列には含まれない、という代数的な命題を示すことにより、否定的に解決されます。そのためこのような解決方法は、ギリシャの人々にとっては想像もできない方法であったに違いありません。古代ギリシャから19世紀までの2000年間と、20世紀初頭から21世紀初頭までの100年間のどちらが長いかは、単純には比較できませんが、科学の発達と情報の伝達速度を考えた場合、むしろ後者の方が長いとも言えます。しかし、いずれにしても、未解決の問題がそれを遙かに凌駕する新しい方法で解決されるという典型的な例であり、平凡な努力では何も動かすことはできないということを、示唆しているように思います。

最後になりましたが、このような変化のある時代に生きていることに感謝すると共に、改訂版の要望を寄せていただき、後押しをしていただいた、多くの研究者・学生の方々に、心より感謝いたします。

## 索引

- あ行
- $I$ -対 ( $I$ -pair) 138
- 圧縮円板 (compressing disk) 85
- 圧縮可能 (compressible)
- 曲面 (surface) が<sup>s</sup> — 85
- 2次元円板 (2-disk) が<sup>s</sup> — 85
- 2次元球面 (2-sphere) が<sup>s</sup> — 85
- 圧縮不可能 (incompressible)
- 曲面 (surface) が<sup>s</sup> — 85
- 2次元円板 (2-disk) が<sup>s</sup> — 85
- 2次元球面 (2-sphere) が<sup>s</sup> — 85
- アニュラス (annulus) 17
- 位相幾何学 (topology) i
- 1次元多様体 (1-manifolds) 15
- 一般の位置
- (general position) 1, 11
- 一般の位置写像
- (general position map) 12
- 一般の位置の議論
- (argument of general position) 13
- 埋め込み (embedding) 9
- A型イソトピー
- (isotopy of type A) 65
- $S^1$ 上の曲面束
- (surface bundle over  $S^1$ ) 106
- $S^1$ -対 ( $S^1$ -pair) 138
- 円環  $\rightarrow$  アニュラス
- 円周 (circle) 15
- オイラー標数 (Euler characteristic) 6
- オイラー・ポアンカレ関係式
- (Euler–Poincaré relation) 6
- 横断的 (transversal) 11
- か行
- 開星状体 (open star) 5
- 階層 (hierarchy)
- 曲面 (surface) の — 60
- 3次元多様体
- (three dimensional manifold,
- 3-manifold) の — 94
- 片側曲面 (one sided surface) 27
- 加法性 (additivity) 71
- カラー近傍
- (collar neighborhood) 9
- カラー近傍定理
- (collar neighborhood theorem) 9
- 絡み近傍 (link neighborhood) 3
- 絡み複体 (link complex) 3
- 完備メリディアン円板系
- (complete meridian disk system) 29
- 既約 (irreducible)
- 語 (word) が<sup>s</sup> — 36
- 3次元多様体 (3-manifold) が<sup>s</sup> — 53
- 球面定理 (sphere theorem) 73
- 境界 (boundary) 2, 7
- 境界圧縮 (boundary compression) 65
- 境界平行 (boundary parallel) 132
- 共通細分定理 (common subdivision theorem) 4
- 共役 (conjugate) 107

- 極大木 (maximal tree) 32  
 曲面 (surface) 16  
 曲面上の  $I$  束  
   ( $I$  bundle over a surface) 116  
 曲面上の  $S^1$  束  
   ( $S^1$  bundle over a surface) 111  
 曲面束 (surface bundle) 106  
 切り貼り技法  
   (cut and paste technic) 58  
 クネーザー予想  
   (Kneser conjecture) 100  
 くっつける (glueing) 15, 16, 21  
 組合せ球面 (combinatorial sphere) 9  
 組合せ球体 (combinatorial ball) 9  
 組み合わせ多様体  
   (combinatorial manifold) 7  
 クラインの壺 (Klein bottle) 17  
 クラインの壺体 (solid Klein bottle) 25  
 弧 (arc) 15
- さ行
- 細分 (subdivision) 3  
 ザイフェルト多様体  
   (Seifert manifold,  
   Seifert fibered space) 120  
 ザイフェルト対 (Seifert pair) 138  
 ザイフェルト・ファンカンペンの定理  
   (Seifert–van Kampen’s theorem) 38  
 ザイフェルト不変量  
   (Seifert invariant) 122  
 サーストンの幾何化予想 (Thurston’s  
   geometrization conjecture) 153  
 3角形分割 (triangulation) 5  
 3次元球体 (3-ball) 20  
 3次元球面 (3-sphere) 23  
 3次元多様体 (3-manifold) 20  
 3次元トーラス (three dimensional torus,  
   3-torus) 24
- 3重点 (triple point) 12  
 射影 (projection) 105  
 射影空間 (projective space) 86  
 射影平面 (projective plane) 17  
 射影平面定理  
   (projective plane theorem) 73  
 縮約 (collaps) 8  
 種数 (genus) 15, 19  
 障害類 (obstruction class)  
    $S^1$  束 ( $S^1$  bundle) の — 114  
   ザイフェルト多様体  
   (Seifert manifold) の — 123  
 写像類群 (mapping class group) 146  
 自由群 (free group) 37  
 自由積 (free product) 37  
 重心 (barycenter) 3  
 重心細分 (barycentric subdivision) 3  
 星状近傍 (star neighborhood) 3  
 星状複体 (star complex) 3  
 正則近傍 (regular neighborhood) 8  
 正則点 (regular point) 120  
 正則ファイバー (regular fiber) 120  
 積多様体 (product manifold) 24  
 全空間 (total space) 105  
 素 (prime) 53  
 素な3次元多様体 53
- た行
- 互いに平行  
   (mutually parallel) 93, 132  
 多面体 (polyhedron) 2  
 多様体 (manifold) 7  
   境界のある — 7  
   境界のない — 7  
 単純多様体 (simple manifold) 138  
 単純閉曲線 (simple closed curve) 15  
 単体 (simplex) 1  
 単体近似 (simplicial approximation) 5

- 単体写像 (simplicial map) 5
  - 単体的複体 (simplicial complex) 2
  - 断面 (section) 115
  - 断面の取りかえ 122
  - 直径 (diameter) 4
  - 対合 (involution) 110
  - 底空間 (base space) 105
  - 適切に埋め込まれた  
(properly embedded) 9
  - デーンの補題 (Dehn's lemma) 72
  - 同一視する (identity) 16, 21
  - 同形 (isomorphic) 5
  - 同相 (homeomorphic) i
  - 同相写像 (homeomorphism) i
  - 同調している (coherently) 13
  - 特異点 (singular point) 120
  - 特異ファイバー (singular fiber) 120
  - 特殊ザイフェルト多様体  
(special Seifert manifold) 133
  - 特性ザイフェルト対  
(characteristic Seifert pair) 139
  - 特性トーラス族  
(characteristic torus family) 139
  - トーラス (torus) 15
  - トーラス体 (solid torus) 20
  - トーラス体定理  
(solid torus theorem) 75
  - トーラス分解  
(torus decomposition) 139
  - トーラス分解定理  
(torus decomposition theorem) 139
- な行
- 内点 (interior point) 8
  - 内部 (interior) 2, 8
  - 2次元円板 (2-disk) 15
  - 2次元球面 (2-sphere) 15
  - 2次元多様体 (2-manifold) 15
  - 2重点 (double point) 12
- は行
- ハーケン多様体  
(Haken manifold) 97
  - ハーケン多様体対  
(Haken manifold pair) 137
  - はめ込み (immersion) 9
  - 貼り合わせる (glueing) 21
  - ハンドル体 (handlebody) 21
  - PL写像 (piecewise linear map,  
PL-map) 5
  - PL同相 (PL-homeomorphic) 6
  - ヒーガード曲面 (Heegaard surface) 30
  - ヒーガード種数 (Heegaard genus) 33
  - ヒーガード図式  
(Heegaard diagram) 35
  - ヒーガード分解  
(Heegaard splitting) 30
  - 非退化 (non-degenerate) 137
  - ひねり  $I$  束 (twisted  $I$  bundle) 117
  - ひねり  $S^1$  束 (twisted  $S^1$  bundle) 115
  - 被覆位数 (covering order) 81
  - 被覆空間 (covering space) 81
  - 被覆射影 (covering projection) 81
  - 被覆度 (covering degree) 81
  - 非分離的 (non-separating)
    - 曲面 (surface) が<sup>s</sup> — 62
    - 2次元球面 (2-sphere) が<sup>s</sup> — 53
  - 非本質的 (inessential)
    - 曲面 (surface) が<sup>s</sup> — 132
    - 弧 (arc) が<sup>s</sup> — 60
  - 単純閉曲線  
(simple closed curve) が<sup>s</sup> — 42
  - 2次元円板 (2-disk) が<sup>s</sup> — 62
  - 2次元球面 (2-sphere) が<sup>s</sup> — 53
  - ファイバー (fiber) 105, 119, 120
  - ファイバー構造 (fiber structure) 124

- ファイバートーラス体  
 (fibered solid torus) 119  
 ファイバー束 (fiber bundle) 105  
   断面をもつ — 115  
   — の断面 115  
 複体 (complex) 2  
 部分多様体 (submanifold) 8  
 部分複体 (subcomplex) 2  
 プリズム多様体 (prism manifold) 124  
 分岐点 (branched point) 12  
 分離的 (separating)  
   曲面 (surface) が<sup>s</sup> — 62  
   2次元球面 (2-sphere) が<sup>s</sup> — 53  
 閉曲面 (closed surface) 16  
 閉多様体 (closed manifold) 7  
 平面曲面 (planar surface) 26  
 ベッチ数 (Betti number) 6  
 ポアンカレ予想  
 (Poincaré conjecture) 74, 153  
 本質的 (essential)  
   曲面 (surface) が<sup>s</sup> — 132  
   弧 (arc) が<sup>s</sup> — 60  
   単純閉曲線  
   (simple closed curve) が<sup>s</sup> — 42  
   2次元円板 (2-disk) が<sup>s</sup> — 62  
   2次元球面 (2-sphere) が<sup>s</sup> — 53
- ま行
- 導かれた向き (induced orientation) 13  
 向き付け可能 (orientable) 13  
 向き付け可能閉曲面  
 (orientable closed surface) 15  
 向き付け不可能 (non-orientable) 13  
 向き付け不可能閉曲面  
 (non-orientable closed surface) 19  
 向きを逆にする  
 (orientation reversing)
- 同相写像  
 (homeomorphism) が<sup>s</sup> — 13  
 単純閉曲線  
 (simple closed curve) が<sup>s</sup> — 25  
 向きを保存する  
 (orientation preserving)  
 同相写像  
 (homeomorphism) が<sup>s</sup> — 13  
 単純閉曲線  
 (simple closed curve) が<sup>s</sup> — 25  
 無限被覆空間  
 (infinite covering space) 81  
 メービウスの帯 (Möbius band) 17  
 メリディアン (meridian) 44  
 メリディアン円板 (meridian disk) 29  
 面 (face) 2  
   自由な — 8  
 最も内側 (innermost) 54  
 最も外側 (outermost) 67
- や行
- 有限被覆空間  
 (finite covering space) 81  
 融合自由積  
 (amalgamated free product) 74
- ら行
- 理想的に埋め込まれた  
 (perfectly embedded) 138  
 両側曲面 (two sided surface) 27  
 輪環体 → トーラス体  
 輪環面 → トーラス  
 連結和 (connected sum)  
   曲面 (surface) の — 16  
   3次元多様体 (3-manifold) の — 51  
 レンズ空間 (lens space) 44  
 ロンジチュード (longitude) 44

森 元 勘 治 略 歴  
もり もと かん じ

- 1982 年 神戸大学理学部数学科卒業  
1987 年 神戸大学大学院自然科学研究科修了  
(学術博士)  
1987 年 拓殖大学工学部専任講師  
1992 年 拓殖大学工学部助教授  
2001 年 甲南大学理工学部教授  
2008 年 甲南大学知能情報学部教授  
現 在 同上

主 要 著 書

- 結び目理論  
(共著, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990 年)  
基礎 線形代数  
(共著, 学術図書出版社, 2010 年)

---

2013 年 5 月 3 日

電子版発行

3 次元多様体入門

著 者 森元勘治

---